

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES
DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA APLICADA III
(POLÍTICA ECONÓMICA)



TESIS DOCTORAL

**El control de sistemas dinámicos caóticos en economía: una aplicación
a las reglas de política monetaria**

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTORA

PRESENTADA POR

Graciela Chaparro Guevara

DIRECTOR

Lorenzo Escot Mangas

Madrid, 2016

Universidad Complutense de Madrid
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada III (Política Económica)



**El control de sistemas dinámicos caóticos en
economía: una aplicación a las reglas de
política monetaria**

TESIS DOCTORAL

GRACIELA CHAPARRO GUEVARA

DIRECTOR: Dr. D. Lorenzo Escot Mangas

Madrid, Octubre de 2015

Universidad Complutense de Madrid
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada III (Política Económica)



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

El control de sistemas dinámicos caóticos en economía: una aplicación a las reglas de política monetaria

Proyecto de Tesis realizado por Graciela Chaparro Guevara para la obtención del título de doctor en Ciencias Económicas y Empresariales por la Universidad Complutense de Madrid, bajo la dirección del Dr. D. Lorenzo Escot Mangas, profesor de la Facultad de Estudios Estadísticos de la Universidad Complutense de Madrid.

Madrid, Octubre de 2015

A Marcela y Carolina

INDICE

Agradecimientos	1
Resumen	5
Abstract.....	7

Capítulo 1: INTRODUCCIÓN

1.1. Objetivo general	9
1.2. Antecedentes.....	12
1.3. Estructura de la tesis.....	15

Capítulo 2: FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICAS DEL CAOS DETERMINISTA

2.1. Sistemas dinámicos: definición	19
2.1.1 Sistemas dinámicos en tiempo continuo.	20
2.1.2. Sistemas dinámicos discretos	23
2.2. Solución de un sistema dinámico	24
2.2.1 Tipos de solución de un sistema dinámico	26
2.2.1.1 Soluciones analíticas	26
2.2.1.2 Soluciones numéricas	27
2.3. Clasificación de los sistemas dinámicos.....	29
2.3.1. Sistemas dinámicos autónomos y no autónomos	29
2.3.2. Sistemas dinámicos lineales y no lineales	31
2.3.3. Sistemas dinámicos estocásticos y deterministas	34
2.3.4. Sistemas dinámicos disipativos y conservativos	35
2.4. Equilibrio dinámico: Atractores.....	36
2.4.1. Atractor de punto fijo.....	38
2.4.1.1 Estabilidad de los puntos fijos.....	39
2.4.2. Atractor periódico o ciclo límite	41
2.4.3. Atractor cuasi-periódico o Toro.....	43
2.4.4. Atractor extraño	44
2.5. Sistemas dinámicos caóticos	47
2.6. Medidas del comportamiento caótico.....	50
2.6.1 Exponentes de Lyapunov	51
2.6.2 Geometría Fractal.....	53
2.6.2.1 Dimensión de Hausdorff.....	57
2.6.2.2 Dimensión Box-Counting	58
2.6.2.3 Dimensión de Lyapunov.....	63
2.6.2.4 Dimensión de correlación.....	64
2.7. Algunos sistemas dinámicos caóticos.....	65
2.7.1. Sistemas dinámicos discretos	65
2.7.1.1 aplicación logística	65
2.7.1.2 Aplicación de Hénon	78
2.7.1.3 Aplicación de Gauss	80
2.7.2. Sistemas dinámicos continuos.....	89
2.7.2.1 Sistema de Lorenz.....	89
2.7.2.2 Sistema de Rössler	92

Capítulo 3: FUNDAMENTOS DEL CONTROL DE SISTEMAS DINÁMICOS

3.1.	Componentes de un sistema dinámico para la teoría del control	97
3.2.	Objetivos de control.....	101
3.3.	Formas de control.....	102
3.3.1.	Feedback o sistema de control en lazo cerrado	102
3.3.2.	Feedforward o sistema de control en lazo abierto	103
3.4.	Estabilización por realimentación de estado	103
3.4.1.	Asignación de polos.....	104
3.4.2.	Controlabilidad de un sistema dinámico.....	106
3.4.2.1	Condición de controlabilidad.....	106
3.4.3.	Diseño para la ubicación de polos	107
3.4.4.	Ejemplo de determinación de la matriz de ganancias de realimentación	108
3.5.	Control de sistemas caóticos.....	110
3.5.1.	Objetivos de control de caos	111
3.5.1.1	Estabilización de trayectorias caóticas.....	111
3.5.1.2	Seguimiento (tracking) de trayectorias caóticas	112
3.5.1.3	Generación de comportamiento caótico.....	112
3.5.1.4	Sincronización controlada	113
3.5.2.	Métodos de control del caos	113
3.5.2.1	Control feed – forward por señales periódicas	114
3.5.2.2	Control feed-back.....	115
3.6.	Control por el método OGY (Ott, Gerbogi and Yorke, 1990).....	115
3.6.1.	Ecuaciones de control	117
3.7.	Ejemplos de control de algunos modelos usando el método OGY.	119
3.7.1.	Control de la aplicación de Hénon	120
3.7.2.	Control de la aplicación logística	123

Capítulo 4: FUNDAMENTOS Y REGLAS DE POLÍTICA MONETARIA

4.1.	Fundamentos de política monetaria.....	132
4.1.2.	Estrategia en dos niveles de la Política Monetaria.....	134
4.1.3.	Estrategia directa o en un nivel de la Política Monetaria	136
4.1.4.	Política monetaria discrecional	139
4.2.	Reglas de política monetaria	141
4.2.1	Reglas fijas o en lazo abierto	143
4.2.2	Reglas flexibles o en lazo cerrado	144
4.2.3	Regla de Taylor	146
4.3.	Reglas de control en política monetaria y estabilización macroeconómica.....	152

Capítulo 5: EL CONTROL DE SISTEMAS DINÁMICOS CAÓTICOS EN ECONOMÍA

5.1.	Control en el modelo de inflación de Futoma y Southworth (2011)	162
5.1.1.	Derivación del modelo	163
5.1.2.	Comportamiento dinámico del sistema.....	166
5.1.3.	La regla de control en el modelo monetario de Futoma y Southworth (2011).....	168
5.2.	Control en el modelo no lineal de Soliman (1996) de inflación – desempleo.....	172
5.2.1	Modelo empírico de Soliman (1996a).....	175
5.2.1.1	Comportamiento dinámico del sistema	175
5.2.1.2	Control del comportamiento caótico del modelo empírico de Soliman de inflación-desempleo	178

5.2.2	Modelo exponencial de Soliman (1996b)	187
5.2.2.1.	Comportamiento dinámico del sistema	188
5.2.2.2	Control del comportamiento caótico en el modelo inflación desempleo.....	193
5.3.	Control en el modelo de hiperinflación de Punita (2011)	201
5.3.1.	Derivación del modelo	201
5.3.2.	Comportamiento dinámico del sistema	204
5.3.3.	Control del comportamiento caótico en el modelo de hiperinflación.....	205

Capítulo 6: CONCLUSIONES

6.1	Principales conclusiones y futuras líneas de investigación.....	209
-----	---	-----

BIBLIOGRAFIA	223
---------------------------	------------

Agradecimientos

Al profesor Lorenzo Escot Mangas por su valiosa ayuda, paciencia y ánimo para llevar a buen término este trabajo. Al profesor José Andrés Fernández Cornejo, por su amistad a pesar de mis espinas. A los ingenieros Liliana Fernández y Juan Mauricio Salamanca por su ayuda desinteresada en los temas de control. A Roberto Avila, por todo.

Dos peligros amenazan el mundo, el orden y el desorden.

Paul Válerý.

Resumen

El control de sistemas dinámicos caóticos en economía: una aplicación a las reglas de política monetaria

Esta tesis vincula el estudio de los sistemas dinámicos caóticos con la teoría del control para explorar la relación que existe entre los métodos de control del caos y las reglas de política monetaria. En ambos casos está presente un objetivo estabilizador; de una parte, los métodos de control del caos buscan corregir movimientos irregulares estabilizando alguna de las orbitas periódicas inestables que se encuentran en un atractor extraño, esto es, llevar al sistema de un comportamiento caótico a un comportamiento regular; mientras que en economía, los *policy maker* fijan una meta para las variables objetivo de política y buscan que el valor fijado coincida con el valor observado. La forma con la cual se estabiliza es a través del empleo de reglas de control realimentado que operan reduciendo la diferencia entre el valor observado para la variable y su valor fijado, empleando para ello un instrumento de control. Así, las reglas de control de sistemas dinámicos caóticos y las reglas de política tienen como objetivo que el sistema en el cual sean aplicadas tenga un comportamiento deseado.

Buscamos aplicar en esta tesis las técnicas de control de los sistemas dinámicos caóticos, en particular, el método OGY de control del caos, al diseño de reglas de política monetaria para comprobar su potencial estabilizador en las variables económicas. Pretendemos mostrar que el caos se puede controlar y que los métodos desarrollados para su control pueden servir de herramientas prácticas para la elaboración de políticas de estabilización. El método que empleamos aquí se puede aplicar en cualquier sistema dinámico que presente comportamiento caótico.

En economía, el estudio de sistemas dinámicos caóticos se ha dirigido a la elaboración de modelos teóricos que presenten comportamiento caótico y a su detección en series temporales. Esta tesis corresponde a una tercera línea de investigación dirigida al control del caos. En cuanto al desarrollo de modelos teóricos, la existencia de realimentación temporal entre las variables económicas, la no linealidad en las relaciones y la sensibilidad del sistema ante cambios en las condiciones iniciales ha posibilitado elaborar modelos económicos con comportamientos caóticos posibles desde el punto de vista económico, que no dependen de doctrinas o de escuelas de pensamiento específicos, y que ponen de manifiesto las limitantes de los modelos teóricos tradicionales. Sin embargo, encontrar alguna evidencia clara de comportamiento caótico en las series temporales económicas solo ha sido posible en series financieras de alta frecuencia, con poco o ningún resultado en series de variables reales. Así, aunque los resultados de esta segunda línea de investigación en dinámica caótica no han evidenciado claramente detección de comportamiento caótico, si han mostrado la existencia de dependencia no lineal entre variables económicas.

La tercera línea de investigación en la cual se inscribe esta tesis da respuesta a esta paradoja, en el sentido de mostrar que si bien es posible construir modelos teóricos caóticos en economía pero sin evidencia clara en series temporales, el caos se puede controlar, y la forma en la cual se controla el comportamiento caótico en economía es a través del uso de reglas de política que, en semejanza con las reglas de control del caos, llevan a que una variable tome un valor deseado haciendo ajustes sobre un instrumento de control. Podemos considerar entonces que la política económica es un proceso de control que se conduce a través de reglas que emplean realimentación negativa y que logra estabilizar el comportamiento dinámico de las economías reales, aunque tal comportamiento siga siendo elusivo a los test de detección de caos.

Abstract

Controlling chaotic dynamical systems in economy: an application for monetary policy rules

This thesis links the study of chaotic dynamical systems with control theory to explore the relationship between chaos control methods and rules of monetary policy. In both cases a stabilizing target is present; on the one hand, chaos control methods seek to correct any irregular movements stabilizing unstable periodic orbits that are in a strange attractor, ie lead to chaotic behavior system to regulate behavior; while in economy, policy maker set a target for variables and seek policy objective than the set value matches the observed value. The way in which it is stabilized through the use of feedback control rules that operate reducing the difference between the observed value for the variable and its set value, employing an instrument of control. Thus, the rules control chaotic dynamical systems and policy rules aim the system in which they are applied has a desired behavior.

In this thesis we seek to apply the techniques of control of chaotic dynamical systems, in particular OGY chaos control method, the design of monetary policy rules to check its potential in stabilizing economic variables. We intend to show that chaos can be controlled and developed methods for control can serve as practical tools for the development of stabilization policies. The method used here can be applied to any behavior that this chaotic dynamic system.

In economics, the study of chaotic dynamical systems has led to the development of theoretical models that present chaotic behavior and its

detection in time series. This thesis corresponds to a third line of research aimed at controlling the chaos. Regarding the development of theoretical models, the existence of temporary feedback between economic variables, nonlinearity in relationships and system sensitivity to changes in the initial conditions has enabled economic modeling with possible chaotic behavior from an economic point of view which do not depend on schools or doctrines specific thought, and reveal the limitations of traditional theoretical models. However, finding any clear evidence of chaotic behavior in economic time series has only been possible in high frequency financial series, with little or no results in series of real variables. Thus, although the results of this second line of research in chaotic dynamics have not clearly demonstrated detection of chaotic behavior, if have shown the existence of nonlinear dependence between economic variables.

The third line of research in which the thesis is part responds to this paradox, in the sense of showing that while it is possible to construct theoretical models in economics chaotic but without clear evidence in time series, chaos can be controlled, and way in which chaotic behavior is controlled economy is through the use of policy rules that, in similarity to the control rules chaos, leading to a variable takes a desired value by making adjustments on an instrument of control. We can then consider that economic policy is a control process that is conducted through rules that employ negative feedback and manages to stabilize the dynamic behavior of real economies, but such behavior remains elusive to detection test chaos.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1. Objetivo general

El objetivo de esta tesis es aplicar las técnicas de control de sistemas caóticos al diseño de políticas económicas que persigan estabilizar la economía. El control de sistemas caóticos busca suprimir la irregularidad endógena o exógena de los sistemas dinámicos caóticos manipulando levemente alguno de los parámetros del sistema que generen el comportamiento irregular.

Buscamos mostrar cómo a través de la manipulación de parámetros de política monetaria que estén a disposición de las autoridades económicas, es posible eliminar comportamientos caóticos no deseados llevando a la economía a estabilizarse en un comportamiento deseado. Con ello pretendemos mostrar que es posible deducir reglas de intervención de política económica y a la vez sustentar teóricamente el uso de reglas de política monetaria.

Los métodos de control son una herramienta aplicable a cualquier sistema dinámico que presente comportamiento caótico; su objetivo es corregir los movimientos irregulares producidos por el comportamiento no lineal de las variables y consiste en estabilizar una trayectoria caótica en alguna órbita periódica inestable dentro de un atractor extraño haciendo pequeñas perturbaciones en los parámetros del sistema.

Mediante el empleo de técnicas de control del caos se busca, por tanto, hacer que una dinámica irregular sea regular; en economía, esto significa estabilizar las trayectorias temporales de las variables económicas en unos valores predeterminados por las autoridades económicas. El proceso de estabilización de las variables macroeconómicas a través de la política monetaria será, entonces, un proceso en el cual se fija una meta u objetivo para unas variables finales que se tratarán de alcanzar mediante la manipulación de un instrumento de control monetario, haciendo que las trayectorias de las variables objetivo se estabilicen en sus valores deseados.

Este proceso de estabilización se realiza a través del uso de reglas, en concreto, la política monetaria que siguen la mayoría de bancos centrales se guía a través de reglas tipo Taylor (1993). Esta regla actúa de manera estabilizadora sobre la inflación y la producción elevando la tasa de interés nominal de corto plazo para incrementar la tasa de interés real a fin de desestimular la demanda agregada y mitigar las presiones inflacionarias y, actuará en sentido contrario cuando la economía necesite ser estimulada. La estabilización procede del proceso de realimentación negativa que se presenta entre el instrumento de control monetario o tasa de interés y las variables objetivo: se eleva cuando las variables están por encima de su objetivo y desciende cuando están por debajo. De esta forma, los movimientos en la tasa de interés aseguran que la inflación y el producto permanezcan cercanos a sus valores objetivo.

Actualmente los bancos centrales de los principales países industrializados han implementado su política monetaria siguiendo reglas realimentadas tipo Taylor para la tasa de interés; además, siguen una política monetaria activa en el sentido de que la tasa de interés nominal responde más que uno a uno ante presiones inflacionarias.

En semejanza con las reglas de control provenientes de la teoría del control, la regla de Taylor busca estabilizar la economía a través del manejo de un parámetro de control, en este caso, la tasa de interés. Las reglas de control pueden proporcionar entonces una fundamentación rigurosa a las reglas de

política tipo Taylor, que hasta ahora en la literatura se concebían más como reglas prácticas o empíricas sin que existiera una fundamentación clara. En esta tesis tratamos de vincular las reglas de política monetaria con las reglas desarrolladas por la teoría del control de sistemas dinámicos caóticos.

Los métodos desarrollados por la teoría del control así como los de control del caos buscan, entonces, el mismo objetivo que las reglas de política monetaria: estabilizar unas variables alrededor de unos valores predeterminados. Este objetivo se logra manipulando los parámetros de control para que éstos influyan en las variables de estado y obtener una respuesta deseada. De esta forma, las reglas de control provenientes de la teoría del control tienen una aplicación práctica en el diseño de políticas de estabilización. Los *policy maker* tendrán la posibilidad de modificar indirectamente (manipulando los instrumentos de control) el valor de las variables objetivo de la política económica.

La aplicación de métodos provenientes de la teoría del control no es nueva en economía; por ejemplo, un campo importante de aplicación de las técnicas de la teoría del control se encuentra en el área del control óptimo. El problema del control óptimo en general, consistirá en elegir trayectorias óptimas para los instrumentos de control que maximizan o minimizan un objetivo planteado. Las principales aproximaciones a la solución de un problema de control óptimo provienen del cálculo de variaciones, la programación dinámica y el principio del máximo de Pontryagin. (Neck, R., 2009).

En esta tesis no buscamos la aplicación de métodos de control óptimo, desarrollados también por la teoría de control¹. Nuestra principal motivación es la aplicación de técnicas de control de sistemas dinámicos caóticos que llevan a que un sistema dinámico evolucione de una manera predeterminada; en el caso de la economía, buscamos que las variables económicas alcancen

¹ Athans, M., & Kendrick, D. (1974), hacen una revisión histórica de la aplicación de métodos de control en la economía a nivel microeconómico, macroeconómico, de planificación económica y predicción. Ver también, Pitchford, J., & Turnovsky, S. (1977) para aplicaciones de teoría del control al análisis económico y Fernández Díaz et al (1989) para aplicaciones a la política económica.

un nivel deseado o planeado por los responsables de política. El resultado que se espera obtener es saber si los métodos de control del caos pueden ser usados como una herramienta de análisis para la toma de decisiones por parte de las autoridades monetarias en la búsqueda de la estabilización de las variables macroeconómicas.

1.2. Antecedentes

El análisis de sistemas dinámicos, no lineales y complejos es un campo de estudio interdisciplinario que se ha desarrollado en las ciencias naturales y progresivamente se ha aplicado en las ciencias sociales². Desde la década del 1980 surge el interés por dichos estudios para que puedan ser utilizados en el campo de la economía en razón a que ofrecen herramientas adecuadas para el análisis de fenómenos donde confluyen, simultáneamente, una multiplicidad de factores. La principal aportación de la Matemática del caos es la de presentar sistemas dinámicos perfectamente deterministas, aunque no lineales, que se comportan de manera irregular, aperiódica y aparentemente aleatoria de manera endógena, sin la necesidad de suponer la existencia de ningún factor aleatorio superpuesto a ese sistema determinista.

El estudio de sistemas deterministas que presentan soluciones caóticas fue iniciado por Henri Poincaré a finales del siglo XIX, pero sólo en la década de 1960 y gracias al uso de los computadores, se retoma el análisis de sistemas caóticos, es decir, de sistemas que obedecen a leyes deterministas pero que no siempre actúan de manera predecible y regular. A este comportamiento se le ha llamado *caos determinista* y propone una explicación alternativa a la presencia de irregularidades y de aperiodicidades en el comportamiento de los fenómenos naturales o sociales.

² Véase Fernández Díaz (1994)

La ciencia ha privilegiado en su estudio aquellos fenómenos regulares, ordenados y periódicos, analizables bajo el principio de superposición; sin embargo, actualmente, muchas áreas del conocimiento, y entre ellas la economía, estudian la aparición de irregularidades y aperiodicidades de sistemas caóticos, en los cuales la existencia de interacciones entre los componentes del sistema hace que no se puedan dividir para estudiar sus partes fundamentales y que, por el contrario, su examen requiera que se los conciba como totalidades. La irregularidad de los sistemas caóticos no puede ser vista como dependiente de factores exógenos, sino que es generada por la misma evolución o dinámica del sistema, es decir, por la interacción entre sus componentes.

Actualmente podemos diferenciar entre los fenómenos de *dinámica simple* y los fenómenos de *dinámica compleja*. Entre los primeros podemos encontrar aquellos que evolucionan hacia estados estacionarios (puntos fijos) o que presentan repeticiones periódicas o cíclicas y, entre los segundos, aquellos que muestran fluctuaciones no periódicas, superposición de ciclos y cambios de régimen o cambios estructurales. (Day, R., 1994, p.3-4). Podemos considerar a los fenómenos económicos como pertenecientes a la categoría de *dinámica compleja*. La economía es un sistema dinámico con muchos elementos como el gobierno, las organizaciones, las empresas y los individuos y el tipo de orden que exhibe es el resultado de las interacciones de estas múltiples unidades o agentes heterogéneos. El valor de la *dinámica compleja* en economía reside en su potencial para enriquecer nuestra comprensión de las relaciones entre un resultado agregado y las decisiones de los agentes individuales.

La *dinámica compleja* profundiza nuestra comprensión de los fenómenos económicos como burbujas, inestabilidad, hiperinflación, es decir, de fenómenos que se alejan de la categoría tradicional de equilibrio de estado estacionario, y se constituye en una alternativa para la modelización de fluctuaciones económicas, pues ha desarrollado herramientas alternas para analizar los problemas relacionados con la inestabilidad y las fluctuaciones irregulares que la *dinámica simple* sólo entiende como desviaciones

temporales de los estados de equilibrio y de los ciclos periódicos a los que se supone que debe converger naturalmente la economía. La dinámica simple nos ha permitido comprender un mundo lineal y en equilibrio, ahora buscamos comprender los fenómenos de un mundo caótico a través de modelos de dinámica compleja que reflejen las características reales de la economía.

El desarrollo de las investigaciones sobre dinámica compleja en economía ha seguido dos enfoques: el desarrollo de modelos y el análisis de series de tiempo. Matemáticamente se han construido modelos económicos que desarrollan evoluciones caóticas (Fernández Díaz y Grau-Carles, 2014). Pero a su vez ha sido necesario constatar sobre datos empíricos las fuentes de la evolución errática de muchas series económicas, ya que éstas pueden ser causadas por choques aleatorios exógenos, o por la dinámica interna del sistema; de aquí que el otro enfoque sea el análisis de series de tiempo en donde se han desarrollado nuevas técnicas estadísticas, que complementan a las tradicionales para distinguir entre las fluctuaciones causadas por el azar de aquellas que, aunque irregulares, pertenecen a un sistema determinista³.

Esta tesis pertenece a una tercera línea de investigación en el estudio y aplicación de dinámica compleja en economía, a saber, el control de sistemas dinámicos caóticos, área en la cual existen relativamente pocos trabajos en economía debido a que es un campo relativamente nuevo de investigación pero con un desarrollo vertiginoso a partir de la publicación de Ott, E., Grebogy, C., & Yorke, J. (1990), en donde se propone un método de control de dinámica caótica conocido como método OGY, y que será aplicado en esta tesis al control de modelos monetarios.

No pretendemos en esta tesis defender ningún modelo particular de funcionamiento de la economía ni de determinación de la inflación o la producción agregada de un país. Por el contrario queremos mostrar que los métodos del control del caos pueden aplicarse a cualquier tipo de modelo

³ Véase entre otros Stengos y Murray 1988, Grau-Carles 1996, Gimeno 2000, Escot.2000 y Mateos de Cabo, 2001.

independientemente de sus supuestos doctrinales. El único requisito es que sean modelos dinámicos, esto es, que presenten retroalimentación temporal en sus variables dependientes. Mostraremos que estas técnicas de control se asemejan a las reglas de política monetaria tipo Taylor, otorgándoles a dichas reglas un fundamento teórico y no sólo empírico. Además mostraremos que las técnicas de control del caos permiten deducir de manera óptima el valor de los parámetros que deben aplicarse a dichas reglas de Taylor.

1.3. Estructura de la tesis

La tesis empieza explicando los fundamentos de la matemática del caos determinista (capítulo 2), abarcando las principales herramientas empleadas en el análisis de sistemas que presentan dinámica compleja. Se partirá de la definición de sistema dinámico, diferenciando entre sistemas continuos y sistemas discretos, para ir avanzando en la comprensión de temas como los tipos de atractor y entre ellos, el atractor caótico, que dará lugar a evoluciones irregulares cuando un sistema dinámico se estabiliza en uno de ellos. Así, los sistemas dinámicos caóticos se caracterizarán porque se estabilizan en el largo plazo en un atractor extraño. La parte final de este capítulo está dedicada a exponer las medidas del comportamiento caótico como son los exponentes de Lyapunov y la dimensión fractal del atractor para concluir con ejemplos de sistemas dinámicos continuos y discretos.

En el siguiente capítulo, capítulo 3, se exponen los fundamentos de control de sistemas dinámicos, centrándonos en el control de sistemas dinámicos caóticos y en especial en el método de control propuesto por Ott, E., Grebogy, C., & Yorke, J. (1990), método que busca controlar la dinámica caótica de un sistema perturbando levemente alguno de sus parámetros. Se ejemplificará con el control de la ecuación logística y el sistema de Hénon.

El capítulo 4 está dedicado a presentar los fundamentos y las reglas de política monetaria. Estas reglas representan actualmente la forma en la cual los

bancos centrales conducen la política monetaria. Este es un tema que ha generado mucha investigación, bien sea desde el punto de vista académico para conocer los avances en el desarrollo de la teoría monetaria, o desde un punto de vista empírico para comprender los efectos de los cambios en la postura monetaria de las autoridades económicas.

Actualmente la política monetaria se centra en un objetivo directo de inflación usando los tipos de interés a corto plazo como instrumento de control en reemplazo de los agregados monetarios. La inestabilidad en la demanda de dinero ha hecho que la mayor parte de las economías abandone la estrategia de política monetaria en dos niveles basada en la elección de un agregado monetario como objetivo o meta intermedia para lograr uno o varios objetivos finales. Como consecuencia, muchos países se han replanteado el uso de variables intermedias como medio para alcanzar un objetivo final y la estrategia de política monetaria pasa a ser una estrategia de seguimiento directo de objetivos de inflación; además, su aplicación asegura la credibilidad de los bancos centrales en el logro de este objetivo.

El uso de reglas frente a una política monetaria discrecional busca una política monetaria estable y en este sentido, las reglas de política se han convertido en la principal herramienta de las autoridades económicas para estabilizar las variables macro. La interacción en la economía de agentes heterogéneos da lugar a procesos de realimentación positiva que conduce a soluciones explosivas; la política económica, empleando reglas realimentadas logra estabilizar o neutralizar esos posibles estados explosivos. Una vez expuesta la importancia que en economía y en particular en la política monetaria están adoptando estas reglas de política, profundizaremos en la fundamentación del uso de este tipo de reglas, que se encuentra precisamente en la teoría del control de sistemas caóticos presentada en el capítulo 3 anterior.

Así, el capítulo 5 muestra cómo las técnicas de control de comportamientos caóticos pueden ser aplicadas en la economía para la estabilización de modelos teóricos que presentan comportamientos irregulares endógenos. Se destaca la posibilidad de que la política económica pueda hacer uso de tales

reglas de control de sistemas dinámicos caóticos para realizar su tarea de estabilización, control y regulación de la dinámica económica.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICAS DEL CAOS DETERMINISTA

2.1. Sistemas dinámicos: definición

Los sistemas dinámicos son una parte de la matemática que trata de explicar los procesos en movimiento, es decir, estudia los sistemas cuyos estados cambian con el tiempo bajo la acción de una ley de movimiento que describe la evolución del sistema (Bertuglia, C., & Vaio, F, 2005). La dinámica intenta dar respuesta a preguntas sobre las fuerzas que generan el cambio, por qué ocurre, cómo evoluciona un sistema debido al cambio y cómo puede ser controlado. En economía, la dinámica estudia el cambio temporal de variables económicas.

Un sistema dinámico estará constituido por:

(i) una **variable independiente** respecto a la cual varía el sistema, el tiempo, que podrá estar definido como una **variable continua** o una **variable discreta**⁴.

⁴ Las variables de estado pueden variar respecto al tiempo o a cualquier otra variable; por ejemplo las *ecuaciones diferenciales ordinarias* expresan la variación del sistema respecto a una única variable independiente, mientras que en las *ecuaciones en derivadas parciales*, el sistema puede variar respecto a dos o más variables independientes. En economía, generalmente, se emplean sistemas dinámicos ordinarios, pero existen ejemplos de sistemas en derivadas parciales como el modelo de Black and Scholes (1973) para la valoración de opciones financieras. La dinámica estudia el cambio de las variables de estado respecto al tiempo.

(ii) un conjunto de **variables dependientes o variables de estado** $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ que caracterizarán el **estado del sistema** y cuyos valores irán cambiando con el tiempo.

(iii) un conjunto de **parámetros de control** $\mu = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_p\}$ que especificarán el grado de interacción entre el sistema y su ambiente (Isaza y Campos, 2002, p. 31) y cuya leve modificación dará lugar a cambios en la dinámica del sistema, con lo cual este podrá ser controlado.

(iv) una **ley de movimiento** que determina el cambio continuo o discreto de las variables de estado $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ respecto al tiempo en un proceso de realimentación o de feedback, es decir, el cambio del sistema estará determinado por la ley de movimiento que actúa sobre las variables de estado y por la situación pasada del mismo.

La ley de movimiento es la que constituye el sistema dinámico y matemáticamente tomará la forma de **ecuaciones diferenciales**, si las variables de estado cambian de forma continua respecto al tiempo o, **ecuaciones en diferencias**, si las variables de estado cambian de forma discreta respecto al tiempo, y estará compuesto por tantas ecuaciones como variables de estado tenga el sistema.

2.1.1 Sistemas dinámicos en tiempo continuo.

Un sistema dinámico en tiempo continuo se caracterizará porque la variable independiente t variará de forma continua en el intervalo $\mathbb{R}^+ : t \in I = \{t_0, t_f\}$. Una variable de estado $x(t)$ de un sistema dinámico continuo, variará respecto al tiempo de forma infinitesimal y su variación estará representada por la derivada de la variable de estado $x(t)$ respecto al tiempo t :

$$\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad [2.1]$$

Un sistema dinámico cuyas variables de estado varían de forma continua en el tiempo se llamará **sistema dinámico continuo**.

El estado del sistema dinámico continuo en el instante de tiempo t estará determinado por el valor de las n variables de estado $x(t)$ en ese instante:

$$x(t) := (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \quad [2.2]$$

Donde cada $x_n(t)$ representa una función real que dependerá de la variable independiente t .

El cambio de estado del sistema dinámico continuo se representará por un **sistema de ecuaciones diferenciales**:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t; \mu) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t; \mu) \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t; \mu) \end{aligned} \quad [2.3]$$

Este sistema muestra la variación continua en el tiempo de las n variables de estado $x(t)$ determinado por la ley de movimiento⁵.

El sistema dinámico [2.3] corresponde a un sistema dinámico de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y podrá ser escrito de forma compacta así:

$$\dot{x} = f(x(t), t; \mu) \quad [2.4]$$

Con $x \in D \subset \mathbb{R}^n$; $t \in \mathbb{R}$; $\mu \in V \subset \mathbb{R}^p$.

En este sistema, $\dot{x} = dx(t)/dt$ indica el cambio respecto al tiempo de las n variables de estado, x es el vector de estados de las variables dependientes, t es la variable independiente tiempo y μ es el vector de parámetros del sistema.

⁵ Las ecuaciones diferenciales que forman un sistema dinámico en tiempo continuo pueden ser clasificadas según su tipo y su orden. Por su **tipo**, pueden ser **ecuaciones diferenciales ordinarias** o **ecuaciones en derivadas parciales**. El **orden** de una ecuación diferencial es el orden de la mayor derivada que aparece en la ecuación. Cualquier sistema de orden superior a uno puede reconvertirse a otro de orden uno pero con mayor número de variables de estado. De esta forma, y sin pérdida de generalidad, esta tesis se centrará en los sistemas de orden uno.

El espacio \mathbb{R}^n es el **espacio de estados** o **espacio de fases** del sistema y contendrá cada uno de los **estados** concretos del sistema dinámico en un instante de tiempo dado; cada estado estará determinado por el conjunto de variables que constituyen el sistema y su dimensión será igual al número de variables de estado que tenga el sistema dinámico.

El espacio \mathbb{R}^p es el **espacio de parámetros** del sistema; sus ejes corresponderán a cada parámetro y sus elementos serán puntos que reflejarán combinaciones de parámetros. En ocasiones los parámetros de un sistema dinámico podrán ser modificados para llevar al sistema a un comportamiento deseado o buscado. La **teoría del control** de sistemas dinámicos hace uso precisamente de la posibilidad de hacer modificaciones leves en el valor de los parámetros para ejercer control sobre los sistemas⁶ mientras que la **teoría de bifurcación** estudia el cambio cualitativo del comportamiento del sistema cuando se modifica el valor de los parámetros.

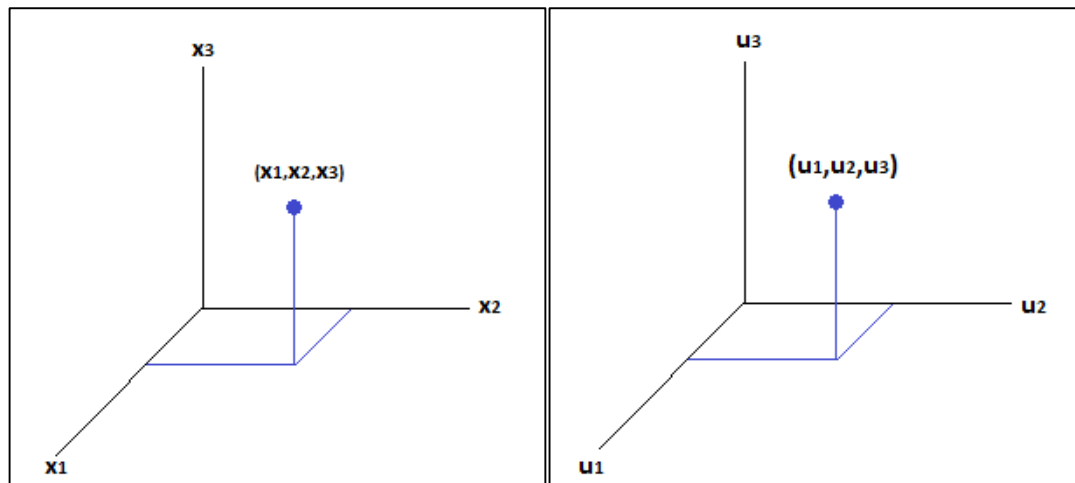


Figura 2.1a. Espacio de fases de un sistema dinámico de tres dimensiones. *Figura 2.1b.* Espacio de parámetros de un sistema dinámico con tres parámetros.

⁶ La política económica se usa precisamente para modificar la actividad económica; por ejemplo, la inflación (variable de estado monetaria) y el déficit (variable de estado fiscal), podrán ser modificadas o controladas por las autoridades monetarias o por el gobierno a través del manejo de la tasa de interés o de los impuestos, hasta lograr que lleguen a un nivel deseado.

2.1.2 Sistemas dinámicos discretos

Un sistema dinámico discreto se caracterizará porque la variable tiempo tomará valores en pasos discretos: $k \in K \subseteq \mathbb{N}$ donde $K = \{k \mid k = 0, 1, 2, \dots, \mathbb{N}\}$. Una variable de estado $x(k)$ que varía en pasos discretos de tiempo formará una relación de recurrencia entre dos instantes de tiempo contiguos:

$$\Delta x = x(k+1) - x(k) \quad [2.5]$$

Un sistema dinámico cuyas variables de estado cambian de forma discreta en el tiempo se denominará **sistema dinámico discreto**.

El estado de un sistema dinámico en tiempo discreto estará determinado por el valor de las n variables de estado $x(k)$ en el instante de tiempo k :

$$x(k) := (x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)) \quad [2.6]$$

El cambio de estado de un sistema dinámico discreto estará definido de manera recursiva y se formalizará a través de **sistema de ecuaciones en diferencias**:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= f_1(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k), k; \mu) \\ x_2(k+1) &= f_2(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k), k; \mu) \\ &\dots \\ x_n(k+1) &= f_n(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k), k; \mu) \end{aligned} \quad [2.7]$$

Este sistema genera una secuencia de valores $\{x(k)\}$ de las n variables de estado dado por la ley de movimiento⁷.

⁷ Las ecuaciones en diferencias se pueden clasificar por el **orden** de la ecuación, el cual se establece de acuerdo con la mayor diferencia que aparece en el sistema de la variable de estado entre dos puntos diferentes en el tiempo; el sistema dinámico [2.7] es un sistema dinámico de ecuaciones en diferencias de primer orden. Esta tesis se centra en los sistemas de orden uno ya que cualquier sistema de orden superior se podrá reescribir como un sistema de orden uno pero con más variables de estado.

El sistema [2.7] se podrá escribir de forma compacta:

$$x(k+1) = f(x(k), k; \mu) \quad [2.8]$$

Con $x \in D \subset \mathbb{R}^n$; $k \in \mathbb{N}$; $\mu \in \mathbb{R}^p$.

donde $x(k)$ es el vector columna de las n variables de estado $x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)$ del sistema, $k = 1, 2, 3, \dots, n$ representa periodos de tiempo de amplitud constante (día, mes, año, etc.)⁸ y μ es el vector de parámetros del sistema.

Los espacios \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^p serán los espacios de fases y de parámetros del sistema respectivamente.

2.2. Solución de un sistema dinámico

La solución de un sistema dinámico expresará la evolución en el tiempo del sistema y estará representada por una **trayectoria temporal** en el espacio $x - t$. La solución de un sistema dinámico es una **secuencia de estados** generados por la ley de evolución temporal de los sistemas [2.4] y [2.8] a partir de un estado inicial x_0 y de un tiempo inicial t_0 . Cada trayectoria temporal mostrará el cambio en el tiempo de cada una de las variables de estado del sistema.

Una solución para el sistema [2.4] es una función:

$$\phi: I \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n \quad [2.9]$$

definida en un intervalo I que posee al menos n derivadas continuas en I , y que al sustituirse en [2.4] lo transforma en una identidad, constituyéndose así en una **solución del sistema en el intervalo**:

$$\dot{\phi}(t) = f(\phi(t), t; \mu) \quad [2.10]$$

⁸ En economía, debido a la naturaleza propia de los fenómenos económicos, las mediciones de las variables se realizan por lo general de forma discreta.

La función ϕ representa geoméricamente una curva en el espacio \mathbb{R}^n y el sistema [2.4] representa el vector tangente en cada punto de dicha curva, razón por la cual a la función f se le llama **campo vectorial**. La visualización de las soluciones será la gráfica de cada una de las variables de estado en función del tiempo y esta representación gráfica mostrará una curva cuya pendiente en cualquier punto es el valor de la derivada en ese punto dado por la ecuación diferencial.

Dado que la solución [2.9] será única para cada condición inicial (t_0, x_0) ⁹, la solución se podrá escribir como $\phi(t; t_0, x_0)$ y tendrá la propiedad de ser invariante ante traslaciones en el tiempo, es decir, las soluciones trasladadas en el tiempo seguirán siendo soluciones (Medio, A., & Lines, M., 2001, p. 14). La gráfica de la solución $\phi(t; t_0, x_0)$ recibirá el nombre de **curva integral**.

El **flujo** de [2.4] es el conjunto de trayectorias $\phi(t) = \phi(t; t_0, x_0)$ generado por el campo de vectores f . El flujo de un sistema dinámico se puede interpretar como el recorrido a lo largo del tiempo de todos los puntos del espacio de fases a través de este espacio, y el **diagrama de fase** o **diagrama de flujo** será la representación geométrica en el espacio de fases del comportamiento de las trayectorias que constituyen el flujo.

Una **órbita** para el sistema [2.4] es una trayectoria o solución del sistema representada en el espacio de fases \mathbb{R}^n y corresponde al conjunto de puntos o estados que son recorridos por la trayectoria en el espacio de fases. Una órbita se define como $\gamma(\phi(t)) = \{\phi(t; t_0, x_0) / t \in I\}$ para valores de $t_0 > t$.

Para el sistema dinámico discreto [2.8], una solución se definirá como:

$$\phi: \mathbb{N} \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n \quad [2.11]$$

⁹ La solución [9] junto con la especificación de un estado inicial $x_0 = x(t_0) := (x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0))$ garantiza la existencia de soluciones únicas puesto que por cada punto o condición inicial (t_0, x_0) del espacio de fases pasará una única trayectoria.

Donde ϕ es una función de variable natural en la que a cada instante k le corresponderá un valor para cada una de las n variables de estado. La solución [2.11] será una solución de [2.8] si verifica:

$$\phi(k+1) = f[\phi(k), k; \mu]; \forall k \in \mathbb{N} \quad [2.12]$$

Una **órbita** para el sistema [2.8] es el conjunto de puntos $\{\phi(k; x_0)\}$ del espacio de fases obtenida para valores de $k_0 > k^{10}$.

La diferencia que existe entre las órbitas de un sistema dinámico continuo y un sistema dinámico discreto es que las primeras quedarán representadas geométricamente en el espacio de fases por una curva formada por un conjunto continuo de estados, mientras que para un sistema dinámico discreto, una órbita estará formada por un conjunto de puntos $x(k) = \{x(0), x(1), x(2), \dots\}$.

2.2.1 Tipos de solución de un sistema dinámico

2.2.1.1 Soluciones analíticas

Son fórmulas explícitas que expresan cualquier estado futuro o pasado en función del estado inicial y del tiempo. Buscan una función desconocida $\phi(t)$ o $\phi(k)$ cuyo cambio en el tiempo estará dado por los sistemas dinámicos [2.4] y [2.8]. La obtención de soluciones analíticas¹¹ para un sistema dinámico continuo se consigue integrando¹² las ecuaciones del sistema.

¹⁰ Al igual que en el caso continuo, a partir de un **estado inicial** $x_0 := (x_0(1), x_0(2), \dots, x_0(n))$ existirá una única trayectoria solución para el sistema [8] que pasa por cada punto (k_0, x_0) en el espacio de fases.

¹¹ Las soluciones analíticas podrán ser *explícitas* e *implícitas*. En las explícitas la variable dependiente x se expresa solo en términos de la variable independiente t y las constantes de integración. En las *implícitas*, las soluciones $\phi(t)$ no se resuelven directamente en términos de t . Serán soluciones todas las $\phi(t)$ que cumplan $\phi(x, t) = 0$. Las *soluciones generales* podrán estar expresadas de forma explícita o implícita y corresponden a una cantidad infinita de soluciones de acuerdo con las posibles elecciones de valores de c (constante de integración); gráficamente corresponden a una familia de curvas solución. Las *soluciones particulares* se obtiene dando valores a c y gráficamente representan una única curva solución.

¹² La integración es el proceso inverso de la diferenciación; esta relación inversa se conoce como teorema fundamental del cálculo. Con la integración se busca encontrar el área de una región dada y con la diferenciación, la pendiente de la tangente a una curva dada.

La obtención de una solución $\phi(k,)$ para un sistema dinámico discreto también podrá calcularse por iteración: la condición inicial $x(0)$ conduce al estado $x(1) = f(x(0); \mu)$, el cual a su vez conduce al estado $x(2) = f(x(1); \mu)$ y así sucesivamente. El proceso de las sucesivas iteraciones se representa como $x_T = F(F(F(F(x(0))))) = F^T(x(0))$. En un sistema dinámico discreto el conjunto de todas las iteraciones $\{F^T(x(0))\}$ constituirá la órbita de x_0 .

Es importante resaltar que no siempre será posible obtener soluciones analíticas explícitas para los sistemas dinámicos y por ello se ha recurrido al empleo de métodos numéricos para la aproximación de soluciones.

2.2.1.2 Soluciones numéricas

Un sistema dinámico continuo solo tendrá soluciones analíticas en los siguientes casos: (i) sistemas de ecuaciones diferenciales lineales; (ii) ecuaciones diferenciales unidimensionales y (iii) casos muy especiales de ecuaciones diferenciales no lineales de orden mayor que 1. (Medio, A., & Lines, M., 2001, p. 18).

En virtud de ello, la teoría de sistemas dinámicos emplea otras herramientas para la obtención de soluciones de sistemas que no tienen solución explícita o no es posible encontrar su fórmula analítica, pero que ofrecen información cualitativa sobre dichas soluciones. Tienen la ventaja de que su cálculo puede ser mecanizado con el uso de un ordenador¹³, pero sólo se obtendrán aproximaciones, no soluciones precisas. Para aproximar soluciones con métodos numéricos, los ordenadores efectúan una acción de iteración del sistema a partir de la especificación de una condición inicial.

¹³ La generalización en el uso de los ordenadores impulsó, así, desde la década del sesenta, los estudios sobre sistemas no lineales (que no tenían solución analítica y no se podían estudiar hasta entonces) y de dinámica caótica; como también el desarrollo de la geometría fractal en los años 70.

Uno de los métodos de integración numérica empleados es el **método de Euler** que consiste en obtener una idea de la gráfica de la solución de un sistema dinámico continuo. Por ejemplo, dada una ecuación diferencial de primer orden:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad [2.13]$$

Con condición inicial $(t(0), x(0))$. El método consistirá en convertir los diferenciales dx y dt en cantidades finitas Δx y Δt con lo cual la ecuación diferencial [2.13] se convertirá en:

$$\Delta x = \Delta t f(t, x) \quad [2.14]$$

La expresión [2.14] se podrá escribir como una ecuación en diferencias¹⁴:

$$x(k+1) = x(k) + (t(k+1) - t(k))f(t(k), x(k)) \quad [2.15]$$

A partir del valor inicial $(t(0), x(0))$, se llega al punto $(t(1), x(1))$ en donde $t(1) = (t(0) + \Delta t)$, y $\Delta t = (t(k+1) - t(k))$. En este punto $(t(1), x(1))$ se itera el procedimiento anterior, es decir, se da un paso de tamaño Δt cuya dirección estará determinada por el campo de pendientes en $(t(1), x(1))$, para llegar al nuevo punto $(t(2), x(2))$, en donde $t(2) = (t(1) + \Delta t)$, y en general $t(k+1) = (t(k) + \Delta t)$.

Usando el campo de pendientes en el punto $(t(k), x(k))$ se podrá calcular el siguiente punto $(t(k+1), x(k+1))$ y la secuencia de valores $x(0), x(1), x(2) \dots$ dará una aproximación a la solución en los tiempos $t(0), t(1), t(2) \dots$

Los métodos de **Runge-Kutta** son una ampliación mejorada del método de Euler que tratan de corregir el error cometido por el uso de la aproximación lineal del polinomio de Taylor. Uno de los más comúnmente utilizados, por Matlab y por otros programas, es el Runge-Kutta de orden 4. Otros métodos comúnmente utilizados son los que utilizan métodos de corrección basados

¹⁴ Un sistema dinámico continuo necesitará ser discretizado para hallar su solución por métodos numéricos.

en polinomios de interpolación de Newton-Gregory. (véase, por ejemplo, Cellier, F., & Kofman, E. (2006).

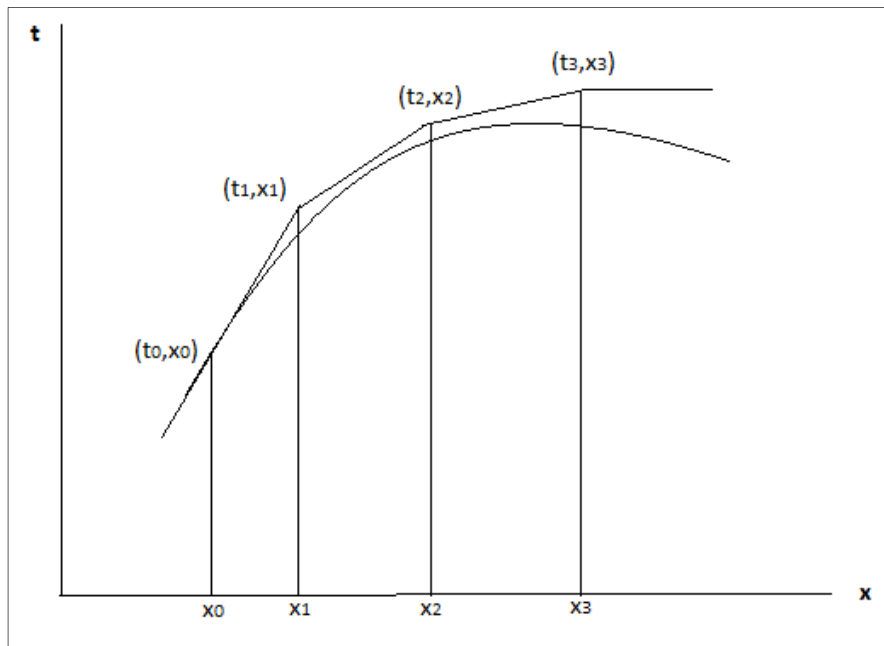


Figura 2.2. Aproximación numérica por el método de Euler.

2.3 Clasificación de los sistemas dinámicos

Existen diferentes tipos de sistemas dinámicos según las características o propiedades que presenten; una primera forma de clasificarlos, es la ya mencionada anteriormente que distingue entre sistemas dinámicos en tiempo continuo y en sistemas dinámicos en tiempo discreto de acuerdo con la variación continua o discreta en el tiempo de las variables de estado. A continuación se presentan otras formas de clasificación de los sistemas dinámicos.

2.3.1 Sistemas dinámicos autónomos y no autónomos

Los **sistemas dinámicos autónomos** son aquellos en los que el tiempo no aparece de forma explícita en las relaciones funcionales del sistema:

$$\dot{x} = F(x(t); \mu) \quad [2.16]$$

$$x(k+1) = F(x(k); \mu) \quad [2.17]$$

Las anteriores expresiones indican que la razón de cambio de las variables de estado se puede formular como una función sólo de las variables dependientes del tiempo $x(t)$ y $x(k)$, esto es, el tiempo estará representado de forma implícita a través del conjunto de variables $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

La independencia del tiempo de un sistema autónomo hace que su tratamiento analítico sea mucho más simple, para ello, los sistemas no autónomos se pueden transformar en sistemas autónomos a través de la introducción de una nueva variable independiente.

En efecto, los sistemas no autónomos [2.4] y [2.8] podrán describirse como autónomos haciendo:

$$F(t, x) = (1, f(t, x(t)))$$

$$F(k, x) = (1, f(k, x(k)))$$

y considerando además:

$$\dot{z} = F(z(t)) \quad [2.18]$$

$$y(k+1) = F(y(k)) \quad [2.19]$$

Donde $z = (t, x(t))$ e $y = (k, x(k))$.

Si $\phi(t)$ y $\phi(k)$ son soluciones a los sistemas [2.14] y [2.15], entonces $z(t) = (t, x(t))$ e $y(k) = (k, x(k))$ también serán soluciones. Este cambio permite re-escribir un sistema no autónomo como uno autónomo pero agregando una dimensión.

En general, será más fácil hallar soluciones para las ecuaciones autónomas, especialmente si ellas son lineales.

2.3.2 Sistemas dinámicos lineales y no lineales

La linealidad es una manifestación de la proporcionalidad que existe entre dos o más variables¹⁵; cuando no existe esta proporcionalidad, se considerará que la relación entre las variables es no lineal. Las formas funcionales lineales serán combinaciones de variables y constantes en las cuales: (1) las variables no tienen exponentes, (2) las variables no están multiplicadas por otras variables, (3) las variables no aparecen en los denominadores y (4) las variables no actúan en función de otras operaciones como raíces cuadradas o logaritmos. (Kalman, 1997, p. 57). En los sistemas dinámicos no lineales, las formas funcionales podrán contener cualquiera de las anteriores expresiones. La forma funcional $f_i(\cdot)$ ($i = 1, \dots, n$) de las ecuaciones que componen un sistema dinámico indicará si el sistema es lineal o es no lineal.

Los sistemas dinámicos [2.4] y [2.8] serán lineales si se pueden representar de la siguiente forma:

$$\dot{x} = Ax(t) + c \quad [2.20]$$

$$x(k+1) = Ax(k) + c \quad [2.21]$$

donde A y c son matrices.

Un sistema dinámico lineal en tiempo continuo tendrá siguientes propiedades:

$$F(ax(t), t; \mu) = aF(x(t), t; \mu) \quad [2.22]$$

$$F(x(t) + y(t), t; \mu) = F(x(t), t; \mu) + F(y(t), t; \mu) \quad [2.23]$$

Y, en el caso de un sistema dinámico lineal en tiempo discreto:

$$F(ax(k), k; \mu) = aF(x(k), k; \mu) \quad [2.24]$$

$$F(x(k) + y(k), k; \mu) = F(x(k), k; \mu) + F(y(k), k; \mu) \quad [2.25]$$

para estados arbitrarios x e y , y números reales o complejos a .

¹⁵ por ejemplo, $x = ay$ está expresando que x es proporcional a y en una proporción a ; gráficamente esta relación quedará expresada por una línea recta.

Las expresiones [2.22]-[2.25] indican que la suma de cualesquiera dos soluciones de los sistemas [2.4] y [2.8], o su multiplicación por un coeficiente arbitrario, también será una solución de los sistemas.

Estas propiedades de los sistemas dinámicos lineales son la expresión matemática del **principio de superposición**, en virtud de la cual **el todo es igual a la suma de sus partes**. Este principio, en general, no se cumple para los sistemas dinámicos no lineales puesto que en ellos existe un proceso de interacción multiplicativa entre los componentes del sistema que impedirá su disociación y que hará que **el todo sea algo más que la suma de sus partes**.

Un sistema dinámico lineal podrá ser resuelto en términos analíticos y sus soluciones, en el largo plazo llegarán a un estado estacionario o irán creciendo o decreciendo indefinidamente; por el contrario, un sistema dinámico no lineal sólo se podrá resolver en términos analíticos en un número limitado de casos; por ello, en la búsqueda de soluciones para dichos sistemas también se emplean los métodos numéricos con los cuales se busca simular, de forma aproximada, la solución del sistema; así mismo, el comportamiento asintótico de las soluciones será más complejo, dando lugar a estados estacionarios y evoluciones explosivas, como en los modelos lineales, pero también a ciclos periódicos, cuasi periódicos y a evoluciones caóticas.

En economía tradicionalmente ha habido dos formas de trabajar con modelos no-lineales, debido precisamente, a la dificultad para hallar soluciones analíticas¹⁶:

¹⁶ Los primeros trabajos con modelos no lineales en economía se encuentran ya en trabajos como los de Kaldor (1940), Hicks (1950), Goodwin (1950, 1951 y 1967) y Allais (1956). La consolidación del análisis no lineal en economía ha sido, sin embargo, un proceso lento.

(i) Transformación logarítmica.

La aplicación de este primer enfoque no representa problema pues se emplea cuando un modelo es **esencialmente lineal**. Tomando como ejemplo la función de producción Cobb-Douglas, ampliamente usada en economía y con la forma no lineal:

$$Q = AK^\alpha L^\beta \quad [2.26]$$

Donde A es una constante positiva que depende del nivel de tecnología, Q es la producción total, K es el capital total, L es la fuerza laboral total usada en la producción y α, β son fracciones positivas. Para cualquier producto positivo Q_0 la función de producción Cobb-Douglas podrá escribirse como:

$$AK^\alpha L^\beta = Q_0 \quad (A, K, L, Q_0 > 0) \quad [2.27]$$

Se encontrará la solución analítica tomando logaritmos naturales a ambos lados de la ecuación:

$$\ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L - \ln Q_0 = 0 \quad [2.28]$$

(ii) Aproximación lineal por series de Taylor.

Considerando el sistema de ecuaciones diferenciales lineales $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ y f diferenciable n veces, $f(x)$ tendrá una aproximación lineal local por series de Taylor en el punto de equilibrio del sistema \bar{x} , escrita en forma compacta:

$$\dot{x} = J_{x=\bar{x}}(x - \bar{x}) \quad [2.29]$$

Donde $J_{x=\bar{x}}$ es la matriz jacobiana de derivadas parciales $Df(x)$ evaluadas en \bar{x} :

$$J_{x=\bar{x}} = Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

En la aproximación lineal, la dinámica del sistema estará gobernada por la matriz jacobiana cuyos valores propios determinarán la estabilidad o inestabilidad del punto de equilibrio¹⁷. Por el resultado general del Teorema de Hartman-Grobman, muchas de las características dinámicas del sistema dinámico no lineal original estarán preservadas en el sistema aproximado en el entorno local del punto de equilibrio (Medio, A., & Lines, M., 2001, p. 72).

Este segundo enfoque de aproximaciones por series de Taylor para linealizar un sistema no lineal, es **esencialmente incorrecto** puesto que la aproximación lineal sólo es válida localmente, es decir, que cuando se considera el comportamiento del sistema más allá del punto de equilibrio éste seguirá exhibiendo un comportamiento no lineal¹⁸.

2.3.3. Sistemas dinámicos estocásticos y deterministas

Otra forma de clasificar los sistemas dinámicos es aquella que los diferencia entre sistemas estocásticos y sistemas deterministas. El sistema dinámico continuo autónomo:

$$\dot{x} = F(x(t); \mu) \quad [2.30]$$

es determinista en el sentido de que es posible determinar cualquier estado pasado del sistema $t < t_0$ o cualquier estado futuro $t > t_0$, dado un estado

¹⁷ El control de un sistema dinámico caótico requerirá la linealización del sistema alrededor de algún punto de equilibrio.

¹⁸ El método de análisis de estática comparativa en economía se apoya ampliamente en la linealización de ecuaciones alrededor de un punto de equilibrio estable para comparar el comportamiento del sistema en este punto de equilibrio con un nuevo punto estable cuando ocurren cambios en los parámetros.

inicial x_0 en un instante de tiempo t_0 . Así mismo, el sistema dinámico autónomo en tiempo discreto:

$$x(k+1) = F(x(k); \mu) \quad [2.31]$$

es determinista puesto que dado un estado inicial $x(0)$, la ley de evolución determinará el siguiente estado $x(1) = F(x(0); \mu)$, que a su vez originará el estado $x(2) = F(x(1); \mu)$, etc.

Así, un sistema dinámico es determinista si las reglas de evolución que lo rigen determinan de manera unívoca su estado futuro a partir del conocimiento del estado presente. (Izasa, F., & campos, D., 2002, p. 68).

Por el contrario, los sistemas dinámicos estocásticos tienen dentro del conjunto de sus variables de estado una variable aleatoria que hace que su evolución temporal se vea afectada por esta variable. La condición inicial de la que parten es una realización concreta de un sistema estocástico por lo cual el sistema no queda determinado unívocamente a partir de su estado inicial, como en los sistemas deterministas, sino que presenta una distribución de probabilidades de posibles estados en instantes futuros.

2.3.4 Sistemas dinámicos disipativos y conservativos

Una característica importante del espacio de fases consiste en la preservación y la contracción de áreas, volúmenes o hipervolúmenes¹⁹. La preservación de un área del espacio de fases significa que todos los puntos que se encuentran en un área del espacio, en un momento dado, se mueven de tal forma que para un tiempo posterior el área ocupada por estos puntos no ha cambiado. En la contracción, todos los puntos que se encuentran en un área dada se mueven hacia un área cada vez más reducida del espacio de fases.

¹⁹ El hipervolumen de n -dimensional es una medida que generaliza el concepto de volumen a espacios de dimensión superior a tres

La propiedad de preservación o de contracción del área del espacio de fases permite clasificar a los sistemas dinámicos en dos categorías: **conservativos y disipativos**. Como hay conservación del volumen, en general, los sistemas dinámicos conservativos no tendrán regiones atractoras en el espacio de fases²⁰; sin embargo, el comportamiento muy complejo o caótico no es exclusivo de los sistemas dinámicos disipativos puesto que ha sido estudiado en sistemas conservativos hamiltonianos²¹ (Medio, A., 1992, p. 33). En economía, la mayoría de los sistemas empleados en el modelado son disipativos, siendo relativamente raras las aplicaciones basadas en modelos conservativos.

2.4 Equilibrio dinámico: Atractores

La propiedad de contracción del volumen del espacio fases de los sistemas dinámicos disipativos hará posible que existan los **conjuntos atractores** a los cuales tenderán las soluciones de un sistema dinámico en el largo plazo, razón por la cual constituyen **estados asintóticos** del sistema.

Los **atractores** representan **estados de equilibrio dinámico estable** pues son el estado en el cual se estabilizan las soluciones de un sistema una vez ha finalizado el comportamiento transitorio posterior a las condiciones iniciales; las soluciones permanecerán en el atractor de manera indefinida si no se produce una alteración del sistema.

Los **repulsores** representan **estados de equilibrio dinámico inestable**²²; cuando el sistema cae en uno de estos repulsores permanecerá en él de manera indefinida en ausencia de ninguna perturbación que lo aleje mínimamente de él, ya que estos repulsores son equilibrios dinámicos. Sin embargo, a diferencia de los atractores, los repulsores son inestables, en la

²⁰ Que como se verá a continuación pueden ser puntos fijos, ciclos límite, atractores cuasiperiódicos y o atractores extraños.

²¹ Los sistemas hamiltonianos son una clase especial de sistemas conservativos caracterizados por tener una constante $H(q, k)$ cuyo significado estará dado por el sistema bajo estudio.

²² Esta tesis se centra en los estados de equilibrio estable o atractores pues los repulsores aunque también representan un equilibrio dinámico corresponden a soluciones inestables del sistema.

medida de que cualquier mínima perturbación que desvíe o aleje al sistema de este repulsor hará que el sistema nunca vuelva de manera natural a él. En este sentido serían necesarias fuerzas exógenas al propio sistema para conducirlo hacia uno de estos repulsores, ya que la dinámica del sistema por sí mismo nunca alcanzará uno de estos equilibrios dinámicos inestables, todo lo contrario, estos repulsores repelerán al sistema y lo alejarán de él.

Se puede definir un **equilibrio dinámico** de un sistema como un **subconjunto del espacio de fases** que es **invariante** bajo la acción del sistema, es decir, las trayectorias que parten de condiciones iniciales dentro del equilibrio permanecerán confinadas en el atractor:

El conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$, **es invariante** bajo el sistema $\dot{x} = F(x(t), t; \mu)$ si para cualquier $x(0) \in S$ se verifica $\phi(t; t_0, x_0) \in S \forall t \in \mathbb{R}$; Así mismo, S **es invariante** bajo el sistema $x(k+1) = F(x(k), k, \mu)$ si para cualquier $x(0) \in S$ se verifica $F^T(x(0)) \in S \forall T \in \mathbb{Z}$.

Un **conjunto atractor** es un equilibrio dinámico estable, y se puede definir de manera formal como un conjunto cerrado invariante $A \subset \mathbb{R}^n$ para el que existe algún entorno V de A tal que $\phi(t; t_0, x_0) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} A, \forall x \in V$ y $\forall t \geq 0$ para un sistema dinámico continuo y, para un sistema dinámico discreto, $F^T(x(0)) \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{} A, \forall x \in V$ y $\forall T \geq 0$.

Los atractores podrán estar constituidos por estados o puntos del sistema. Una secuencia de estados o puntos generará una **órbita** que será recorrida por la trayectoria o solución del sistema a partir de una condición inicial. Por tanto, la forma en que esté constituido un atractor (un punto o un conjunto de puntos), caracterizará el comportamiento asintótico del sistema.

La **cuenca de atracción** del atractor estará formada por el conjunto de todos los puntos iniciales $x(t_0 / k_0)$ cuyas trayectorias $\phi(t/k)$ convergirán al conjunto atractor; así, una trayectoria que se inicie dentro de la cuenca de atracción será atraída hacia el atractor y una vez dentro del atractor, no

podrá salir de esa región del espacio de fases. En este sentido, como se ha mencionado anteriormente, la cuenca de atracción de un repulsor quedará representada por el conjunto vacío.

Los diferentes estados de equilibrio estable a los cuales converge un sistema dinámico son:

- Atractor de punto fijo
- Atractor periódico
- Atractor cuasi-periodico
- Atractor extraño

2.4.1 Atractor de punto fijo

Es un equilibrio dinámico compuesto por un único punto que representa un estado estacionario del sistema. La órbita de un punto fijo será una secuencia constante del mismo estado del sistema.

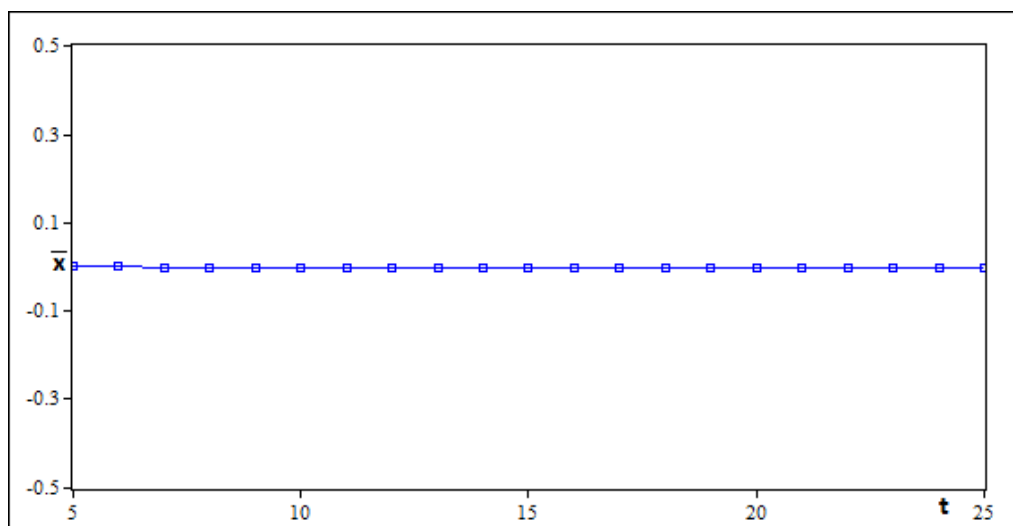


Figura 2.3. Trayectoria temporal estacionaria.

Los puntos fijos podrán ser identificados resolviendo el correspondiente sistema de ecuaciones: $\dot{x} = f(x(t), t; \mu) = 0$ si es continuo y $x(s) = F(x(s), k, \mu)$, si es discreto; sin embargo, los puntos fijos de los sistemas no

lineales, no podrán ser hallados, en general, como soluciones de equilibrio exactas, debiéndose recurrir a las herramientas numéricas y geométricas que darán una aproximación a la solución. Gráficamente, un punto fijo podrá ser obtenido hallando los puntos de corte del gráfico del sistema con la línea recta de 45 grados.

Los sistemas dinámicos lineales tendrán un solo punto fijo, que para el caso de los sistemas lineales homogéneos, se encontrará ubicado en el origen, mientras que los sistemas dinámicos no lineales podrán tener más de un punto fijo.

Una solución $\phi(t) = \bar{x} \forall t \in \mathbb{R}$ es un punto fijo para el sistema dinámico en tiempo continuo $\dot{x} = f(x(t), t; \mu)$, si:

$$f(\bar{x}, t; \mu) = 0 \quad [2.32]$$

Esto es, punto fijo de un sistema dinámico continuo representa una tasa de cambio nula del sistema.

Así mismo, la solución $\phi(k) = \bar{x} \forall k \in \mathbb{N}$ es un punto fijo para el sistema dinámico en tiempo discreto $x(k+1) = F(x(k), k, \mu)$, si:

$$F(\bar{x}, k, \mu) - \bar{x} = 0 \quad [2.33]$$

Los atractores de punto fijo son los únicos estados de equilibrio posibles para un sistema dinámico lineal.

2.4.1.1 Estabilidad de los puntos fijos

Un atractor de punto fijo puede ser estable, asintóticamente estable o inestable de acuerdo con las siguientes condiciones:

(i) el punto fijo \bar{x} del sistema $\dot{x} = f(x(t))$ es **estable** si dado $\varepsilon > 0$ existe un número real $\delta(\varepsilon) > 0$, tal que si $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$, entonces la solución $\|f(t, x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon$ para todo $t > 0$.

Así mismo, el punto fijo \bar{x} del sistema $x(k+1) = F(x(k))$ es **estable** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon)$ tal que $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta(\varepsilon)$, entonces la órbita $\|F^T(x(0) - \bar{x})\| < \varepsilon, \forall T > 0$.

Esto es, un sistema será estable si, al ser perturbado ligeramente de su estado de equilibrio, todos los efectos posteriores permanecen cercanos al equilibrio. Este concepto de estabilidad, es un concepto de **estabilidad local** puesto que se refiere al comportamiento del sistema en la proximidad de un punto de equilibrio, y se le llama **estabilidad en el sentido de Lyapunov**.

La estabilidad de los puntos fijos se establece con el criterio de la derivada analizada en el punto fijo:

$$\lim_{\|x_0 - \bar{x}\| \rightarrow 0} \frac{\|f(t, x_0) - \bar{x}\|}{\|x_0 - \bar{x}\|} = |f'(\bar{x})| \quad [2.34]$$

- Si $|f'(\bar{x})| < 1$, el punto fijo \bar{x} es estable.
- Si $|f'(\bar{x})| > 1$, el punto fijo \bar{x} es inestable.
- Si $|f'(\bar{x})| = 1$, el punto fijo \bar{x} es neutral.

(ii) el punto fijo \bar{x} del sistema $\dot{x} = f(x(t))$ es **asintóticamente estable** si es estable y, existe un $\eta > 0$ tal que $\|x_0 - \bar{x}\| < \eta$, entonces el límite $\lim_{t \rightarrow \infty} \|f(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$.

Así mismo, el punto fijo \bar{x} del sistema $x(k+1) = F(x(k))$ es **asintóticamente estable** si es estable y, existe un $\eta > 0$ tal que $\|x_0 - \bar{x}\| < \eta$ entonces el límite $\lim_{T \rightarrow \infty} \|F^T(x(0) - \bar{x})\| = 0$

Esto es, cada movimiento que empieza muy próximo al punto de equilibrio, converge al punto de equilibrio cuando $t \rightarrow \infty$ o $T \rightarrow \infty$. También es un concepto de estabilidad local y se conoce como **estabilidad asintótica en el sentido de Lyapunov**. La estabilidad asintótica también se conoce como **estabilidad global asintótica** cuando la estabilidad es independiente de la distancia entre el estado inicial y el punto de equilibrio.

(iii) el punto fijo \bar{x} de los sistemas $\dot{x} = f(x)$ y $x(k+1) = F(x(k))$ es **inestable** si no es estable, es decir, si existe $\varepsilon > 0$ y una órbita que inicia en $x(0)$ arbitrariamente cercana al punto fijo tal que, la distancia entre la órbita y el punto fijo es mayor que ε en un momento futuro: $\|f(t, x_0) - \bar{x}\| \geq \varepsilon$ para todo $t > 0$ y $\|F^T(x(0) - \bar{x})\| < \varepsilon, \forall T > 0$.

Los puntos fijos se pueden clasificar en: nodos, focos, puntos de silla y centros, en función de su estabilidad. Esta clasificación se hace de acuerdo con los valores propios del Jacobiano para un estado de equilibrio \bar{x} ²³.

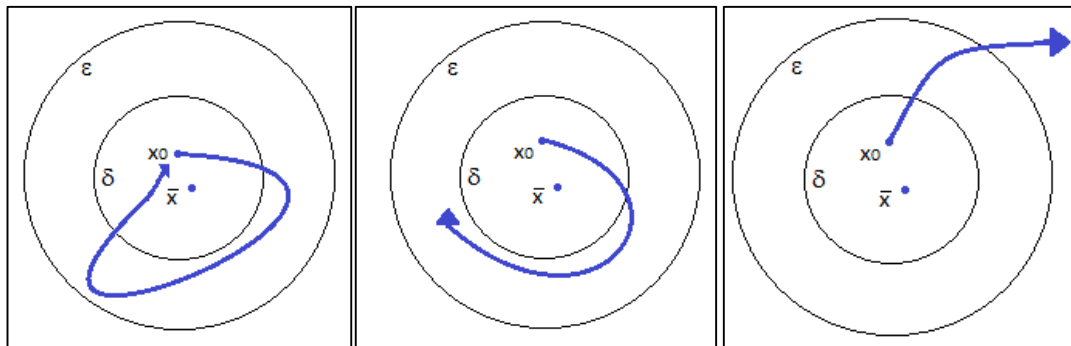


Figura 2.4. Estabilidad de los puntos fijos: a) estable, b) asintóticamente estable, c) inestable.

2.4.2 Atractor periódico o ciclo límite

La órbita del sistema estará compuesta por un conjunto finito de puntos que la solución recorrerá de forma periódica. Este atractor representa un estado oscilatorio del sistema.

²³ Véase Shone(2002)

Una solución $x(t)$ del sistema dinámico $\dot{x} = f(x(t))$ es periódica cuando existe un número positivo T tal que:

$$x(t + T) = x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad [2.35]$$

Un ciclo límite de un sistema dinámico continuo quedará representado en el espacio de fases por una curva cerrada.

Una solución $x(k)$ del sistema dinámico $x(k + 1) = F(x(k))$ será un conjunto finito de estados ordenados que la trayectoria irá recorriendo secuencialmente hasta regresar al primer elemento después de T iteraciones:

$$\begin{aligned} x(k + 1) &= F(x(k)) \\ x(k + 2) &= F(x(k + 1)) \\ &\vdots \\ x(k + 1) &= x(k + T) = F(x(T - 1)) \end{aligned} \quad [2.36]$$

Los puntos periódicos del sistema $x(k + 1) = F(x(k))$ son las soluciones de la ecuación $x(k) = F^T(x(k))$. Gráficamente, corresponden a los puntos de intersección de la recta de 45 grados con el gráfico de la aplicación en su T -ésima iteración.

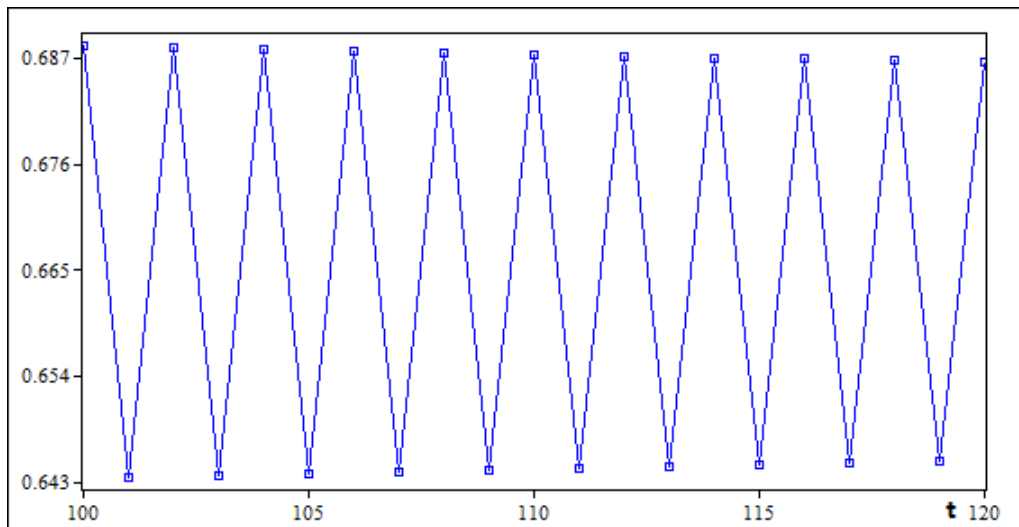


Figura 2.5. Trayectoria temporal periódica.

Los puntos de la órbita de un sistema dinámico discreto serán puntos diferentes. Un punto periódico de periodo T es un elemento $x(k + i)$ con $(i = 1, 2, \dots, T)$ que pertenece a un ciclo periódico de periodo T . Los puntos $x(k + i)$ son puntos fijos de $F^T(x; \mu)$:

$$F^T(x(i)) = x(i) \quad [2.37]$$

Las propiedades de un sistema dinámico discreto podrán ser estudiadas de acuerdo con las propiedades de cualquiera de los puntos fijos de la órbita del sistema.

La estabilidad de un ciclo límite se analiza usando el criterio de la derivada aplicado a los $x(i)$ puntos del ciclo:

$$\begin{aligned} \frac{|F^T(x(i)+h) - F^T(x(i))|}{h} &\cong |F^{T'}(x(i))| = \\ &= |F'(x(T)) \cdot F'(x(T-1)) \cdot F'(x(T-2)) \cdots F'(x(1))| \end{aligned} \quad [2.38]$$

- Si $|F^{T'}(x(i))| < 1$, el ciclo límite es estable
- Si $|F^{T'}(x(i))| > 1$, el ciclo límite es inestable.

Los atractores de punto fijo y de ciclo límite representan la evolución de sistemas dinámicos que tienden a estados estables o a estados que se repiten periódicamente. Los comportamientos más complejos estarán representados por otros tipos de equilibrio como son los toros y los atractores extraños.

2.4.3 Atractor cuasi-periódico o Toro

Un atractor tipo toro describe movimientos cuasi periódicos resultado de la superposición de dos o más ciclos límite independientes; este movimiento se puede visualizar como una línea que gira alrededor del toro formando el atractor sobre su superficie.

El atractor toro puede tener periodicidad exacta o ser cuasi periódico. Periodicidad exacta significa que los periodos de los dos sistemas acoplados se encuentran en proporción simple y por ello las curvas que rodean al toro se unen con precisión. El criterio para que la combinación sea periódica es que el cociente de los dos periodos sea un número racional²⁴, esto es, una fracción exacta p/q donde p y q son números enteros. En el movimiento cuasi periódico el cociente de los dos periodos individuales forma una frecuencia irracional²⁵ y por ello el punto que representa el sistema combinado gira alrededor del toro sin unirse nunca consigo mismo.

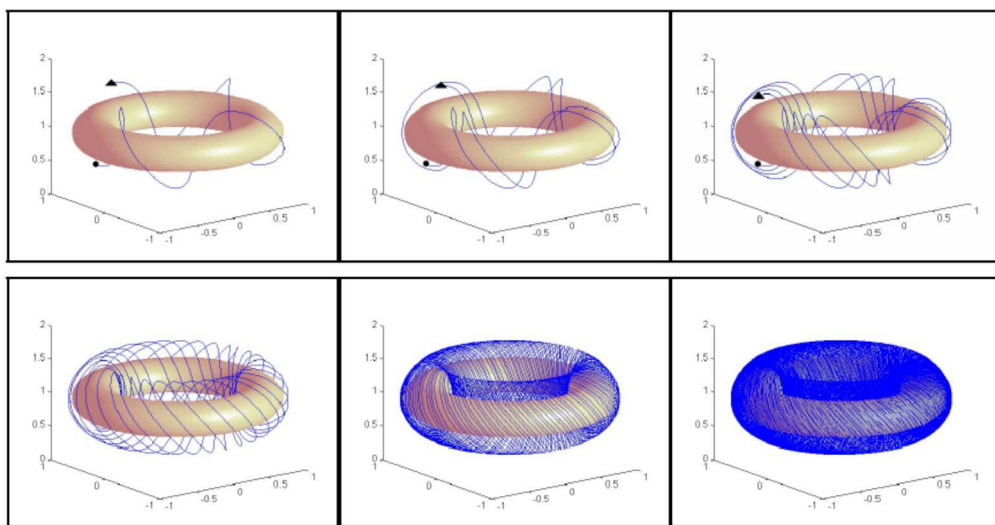


Figura 2.6. Atractor toro.

2.4.4 Atractor extraño

Un atractor extraño se caracterizará porque la órbita del sistema estará compuesta por un **número infinito de puntos** que la solución recorrerá secuencialmente y de **forma aperiódica**; esto es, las trayectorias no pasarán o repetirán su tránsito por puntos o estados por los cuales ya haya

²⁴ La característica de los números racionales es que tiene una forma decimal finita: $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{1}{4} = 0.25$, $\frac{3}{4} = 0.75$ o, como un decimal simple recurrente: $\frac{1}{3} = 0.333333$.

²⁵ Un número irracional no se puede transcribir como una proporción y su expresión decimal contiene un número infinito de términos sin patrón recurrente, tienen un orden aleatorio. Por ejemplo, la cantidad de decimales con que se pueda calcular el número Pi no muestra ninguna repetición.

pasado el sistema, mostrando las soluciones del sistema una alta irregularidad, pues el periodo de su oscilación puede considerarse infinito²⁶.

Los atractores extraños tienen una estructura más compleja que aquella que presentan los atractores periódicos y los cuasi-periódicos ya que están compuestos por un conjunto infinito de puntos ubicados en una región finita del espacio de fases que se estira y luego se pliega sobre sí misma en un proceso continuo, formando infinitas capas de orbitas que se mezclan pero que nunca llegan a cortarse. Este procedimiento de estirado y plegado del espacio de fases sobre sí mismo le confiere una geometría compleja al atractor recibiendo por ello el nombre de **atractor extraño**²⁷.

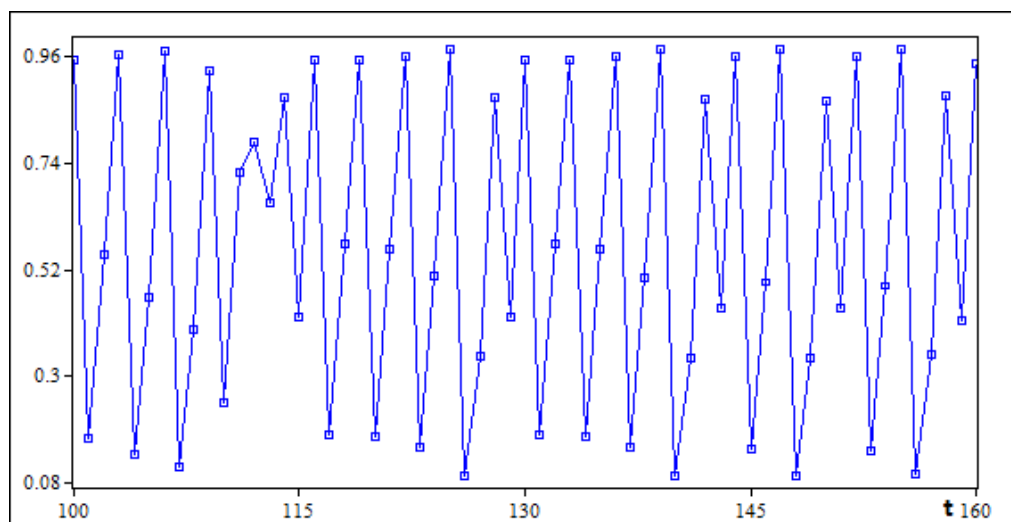


Figura 2.7. Trayectoria temporal caótica.

Un atractor extraño presentará las siguientes características:

²⁶Un punto fijo tendrá periodo uno, los ciclo límite tendrán periodo dos-cuatro-ocho,..., etc, los atractores toro tendrán un periodo irregular pero identificable. La periodicidad de un atractor extraño será tan alta que será imposible identificarla, por ello se dice que su periodicidad es infinita.

²⁷La geometría compleja de un atractor extraño generada por las acciones de estirado y plegado del espacio de fases será estudiada por la **geometría fractal**. La evolución temporal del sistema de Lorenz (1963) se estabiliza en un atractor extraño con forma de alas de mariposa; este fue el primer atractor extraño obtenido.

(i) Infinitas órbitas periódicas inestables

Dentro de un atractor extraño existirá una cantidad infinita de puntos periódicos inestables arbitrariamente cerca de cualquier otro punto del atractor; es decir, los puntos pertenecientes a las órbitas periódicas (puntos fijos, ciclos límite) seguirán presentes en un atractor extraño, pero serán puntos inestables. Por el resultado del teorema Ly-Yorke (1975), las órbitas periódicas inestables dentro de un atractor extraño podrán ser de cualquier periodo.

(ii) Movimiento ergódico de las trayectorias dentro del atractor

La ergodicidad es una propiedad de los procesos que dependen del tiempo y consiste en que la distribución del estado final de un sistema no depende de su estado inicial. La hipótesis del movimiento ergódico fue propuesta por Boltzman en 1871 y de acuerdo con ella, todos los movimientos de un sistema pasan arbitrariamente cerca de cualquiera de sus estados posibles si se espera un tiempo suficiente. Desde cualquier estado o condición inicial en que se inicie un sistema, éste podrá ir a cualquier otro. (Romera, M., 1997, p. 69). De acuerdo la hipótesis de movimiento ergódico, durante su evolución temporal, una trayectoria del sistema recorrerá secuencialmente todos los puntos de cada una las orbitas periódicas inestables alojadas en el atractor extraño.

(iii) Sensibilidad a las condiciones iniciales

Una característica importante de los atractores extraños es que las soluciones dentro del atractor son **sensibles a las condiciones iniciales**, es decir, dos trayectorias en el espacio de fases que empiezan en condiciones iniciales próximas se separarán de manera exponencial a medida que transcurre el tiempo.

Este comportamiento ocurre básicamente en sistemas dinámicos no lineales, en los cuales, la presencia de términos o magnitudes que interactúan de

forma multiplicativa conduce a la falta de proporcionalidad entre los valores iniciales y los valores finales del sistema o, entre causa y efecto, conduciendo a que pequeños cambios en los valores iniciales provoquen grandes cambios en los resultados finales.

Dos soluciones de un sistema dinámico que empiezan en condiciones iniciales $x(0)$ y $x(0) + \varepsilon$ respectivamente, siendo ε una cantidad muy pequeña que representa la distancia entre la evolución de las dos soluciones, pueden separarse de forma exponencial muy rápidamente en el espacio de fases a medida que se incrementa el tiempo. Esta divergencia se puede caracterizar aproximadamente como:

$$\varepsilon(n) \approx \varepsilon e^{\lambda n}$$

donde λ es el **exponente de Lyapunov** que proporciona la tasa promedio de divergencia.

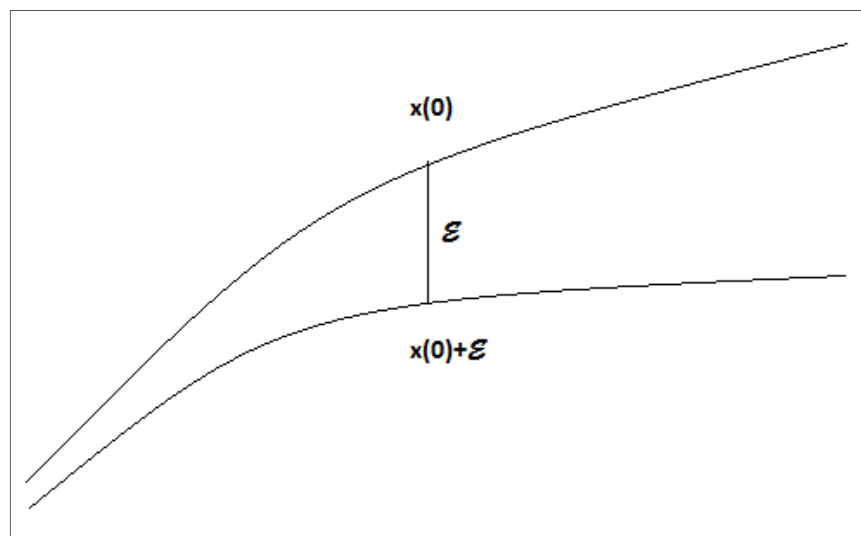


Figura 2.8. Divergencia exponencial causada por la sensibilidad a las condiciones iniciales.

2.5 Sistemas dinámicos caóticos

El comportamiento aperiódico e irregular generado por un sistema dinámico determinista se conoce como **caos determinista** y es propio de los sistemas

dinámicos no lineales. Los sistemas dinámicos que presentan caos determinista se llaman **sistemas dinámicos caóticos** y se caracterizan por:

- (i) son sistemas dinámicos deterministas que convergen a un atractor extraño.
- (ii) sus soluciones son irregulares y aperiódicas.
- (iii) sus soluciones son sensibles a las condiciones iniciales.

Pueden parecer sistemas aparentemente estocásticos, es decir, sistemas cuya irregularidad está sujeta a fuerzas aleatorias externas, pero la falta de regularidad de los sistemas caóticos es intrínseca al sistema y está causada por el proceso de mezcla de las orbitas dentro del atractor, es decir, por las acciones de estirado y plegado del espacio de fases.

Richard Day (Day, 1994) introduce una nueva distinción para los sistemas dinámicos; de un lado se encontrarán aquellos sistemas dinámicos que presentan **dinámica simple** y de otro, aquellos que presentan **dinámica compleja**. Por dinámica simple se puede entender aquel comportamiento que converge a atractores periódicos y cuasi periódicos. El distintivo principal de la dinámica simple es que sus soluciones repiten secuencialmente un número finito de estados periódicamente, es decir, sus patrones se pueden caracterizar de forma finita o simple. Los sistemas dinámicos complejos serán aquellos cuyo patrón de cambio no es periódico ni equilibrado. La evolución a largo plazo, por tanto, converge a un atractor extraño. (Day, 1994, p. 3)

Una de las definiciones de sistema caótico más utilizadas en la literatura es la introducida por Devaney (1989); sin embargo, la primera definición fue hecha por Li y Yorke (1975) y a partir de entonces han surgido diferentes formas de caracterizar el comportamiento caótico²⁸; una de ellas se basa en la existencia de un atractor extraño, con lo cual, un sistema dinámico caótico

²⁸ Martelli, Dang y Seph (1998) presentan varias definiciones de sistema caótico desarrolladas por diferentes autores: Li-Yorke: existencia de órbitas de periodo tres; Devaney: sensibilidad a las condiciones iniciales, transitividad y órbitas periódicas densas; Wiggins: sensibilidad a las condiciones iniciales y transitividad; Martelli: órbitas densas en X las cuales son inestables.

será aquel cuya dinámica se estabilice en un atractor extraño. Esta forma de caracterizar el comportamiento caótico se conoce como **caos en el sentido de Ruelle**.

A continuación se presentará la definición de Devaney (1989, p. 50) por ser una de las más usadas.

(i) Transitividad topológica o mezclado

Un sistemas dinámico es transitivo si para cualquier par de puntos x e y , y cualquier entorno $\varepsilon > 0$ hay un tercer punto z en el entorno ε de x cuya órbita se inscribe en el entorno ε de y .

Por transitividad se podrá entender, entonces, la propiedad por la cual dados dos puntos cualquiera de un sistema dinámico, se podrá hallar un tercer punto arbitrariamente cercano a ambos. La interpretación intuitiva de esta propiedad es que las aplicaciones topológicamente transitivas tienen puntos que se mueven, bajo la acción del sistema, desde un conjunto arbitrariamente pequeño a otro vecino. Es decir, que el atractor caótico no se puede descomponer en dos conjuntos abiertos disjuntos invariantes bajo la acción del sistema

(ii) Puntos periódicos densos en el atractor

Dado un conjunto $Y \subset X$, se dice que Y es denso en X si, para cualquier punto $x \in X$ hay un punto $y \in Y$ arbitrariamente cercano a x , es decir, arbitrariamente cerca de cada punto de Y existirá algún punto de X .

Esta propiedad indica que un sistema dinámico caótico tendrá puntos periódicos arbitrariamente cercanos a cualquier punto de un atractor extraño. Estos puntos periódicos serán, sin embargo, inestables, y tendrán un papel central en la teoría del control del caos cuyo objetivo será, precisamente, estabilizar, de alguna manera, alguno de esos puntos periódicos inestables.

(iii) Dependencia sensible a las condiciones iniciales

Un sistema dinámico F es sensible a las condiciones iniciales si dados dos puntos arbitrariamente cercanos éstos se separan en un valor β luego de k iteraciones; esto es: $|F^k(x) - F^k(y)| > \beta$, siendo $F^k(x)$ y $F^k(y)$ las iteraciones de los puntos x e y k veces. Es decir, puntos arbitrariamente cercanos en el atractor presentan sendas órbitas que tienden a separarse o evolucionar de manera distinta, pero siempre ambas dentro del atractor

Las anteriores tres propiedades caracterizarán a un sistema caótico. Por tanto, según la definición de Devaney, un sistema dinámico F es caótico si:

1. F es transitivo.
2. Los puntos periódicos de F son densos en el atractor.
3. F presenta dependencia sensible a las condiciones iniciales.

Por los resultados de Banks, J., Brooks, J., Cairns, G., Davies, G., & Stacey, P. (1992) las propiedades 1 y 2 implican la propiedad 3. Por lo que en muchos manuales y textos sobre el caos, la definición de caos, por ejemplo en sistemas disipativos, se limita a la existencia de sensibilidad a las condiciones iniciales dentro del atractor –Lorenz (1995) y Alligood et al.(1996), entre otros–

2.6. Medidas del comportamiento caótico

El comportamiento caótico de un sistema dinámico determinista se genera debido a que las soluciones del sistema se estabilizan en un atractor extraño y dentro del atractor, dichas soluciones se ven sometidas a dos acciones opuestas: primero se deben **estirar** debido a la **sensibilidad a las condiciones iniciales** y luego se deben **plegar** para mantener a las trayectorias, que divergen exponencialmente, acotadas dentro del atractor.

La divergencia exponencial de las soluciones podrá ser medida a través del espectro de **exponentes de Lyapunov**²⁹ y la dimensión del atractor podrá ser medida a través de la **dimensión fractal**.

2.6.1 Exponentes de Lyapunov

La estabilidad de las orbitas periódicas se podrá determinar con base en el criterio de la derivada, así, la estabilidad de un punto fijo estará determinada por una derivada negativa evaluada en el punto fijo [2.34] y la estabilidad para un ciclo límite de cualquier periodo estará determinada por el valor de la derivada evaluada en cualquier punto periódico del ciclo [2.38]. En el caso de los atractores extraños, la estabilidad de las soluciones se medirá a través de los exponentes de Lyapunov, encontrándose que la divergencia exponencial de soluciones próximas estará caracterizada por exponentes de Lyapunov positivos y en tal caso, el sistema será caótico.

El exponente de Lyapunov que mide la separación después de n iteraciones de dos puntos inicialmente cercanos se puede obtener de la siguiente manera:

Sea J un intervalo acotado y una función $f: J \rightarrow J$ continuamente derivable. Por cada punto $x \in J$ y cada $\varepsilon > 0$, existe un número $\lambda(x)$ tal que para cada entero positivo n :

$$|f^{[n]}(x + \varepsilon) - f^{[n]}(x)| \approx [e^{\lambda(x)}]^n \varepsilon$$

donde $f^{[n]}(x)$ representa la n -ésima iteración de la función y ε representa un error infinitesimal en el valor inicial del punto x . Por tanto:

$$e^{n\lambda(x)} \approx \left| \frac{f^{[n]}(x + \varepsilon) - f^{[n]}(x)}{\varepsilon} \right|$$

²⁹ Aunque una condición necesaria para que surja comportamiento caótico es que las ecuaciones del sistema dinámico tengan un término no lineal, esto no garantiza la existencia de comportamiento caótico; sólo la existencia de exponentes de Lyapunov positivos es una condición necesaria y suficiente para que exista caos en los sistemas dinámicos disipativos.

entonces:

$$e^{n\lambda(x)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{f^{[n]}(x+\varepsilon) - f^{[n]}(x)}{\varepsilon} \right| = |(f^{[n]})'(x)| \quad [2.39]$$

si $(f^{[n]})'(x) \neq 0$. Entonces tomando logaritmos y dividiendo por n se obtiene:

$$\lambda(x) = \frac{1}{n} \ln |(f^{[n]})'(x)| \quad [2.40]$$

Y haciendo que el número de iteraciones tienda a infinito se obtiene el exponente de Lyapunov:

$$\lambda(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |(f^{[n]})'(x)| \quad [2.41]$$

$\lambda(x)$ es el exponente de Lyapunov de f en x .

Así, se puede establecer la separación de la solución de un sistema dinámico que empieza desde puntos ligeramente diferentes x y $x + \varepsilon$. Un exponente positivo indica que x y $x + \varepsilon$ se alejan y un exponente negativo indica que x y $x + \varepsilon$ se aproximan. Un exponente positivo indicará que la solución es sensible a pequeños cambios en las condiciones iniciales y que estos pequeños cambios crecerán de forma exponencial a medida que evoluciona el sistema. Un sistema dinámico tendrá una evolución completamente diferente partiendo de condiciones iniciales levemente diferentes.

Los sistemas dinámicos unidimensionales tendrán un único exponente de Lyapunov; los sistemas dinámicos definidos por n variables de estado tendrán n exponentes de Lyapunov diferentes y a este conjunto se le llamará **espectro de exponentes de Lyapunov**:

$$\lambda_i(x_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln [|Df^{[n]}(x_1)|] = \quad [2.42]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\ln |\Lambda_i(x_1)| + \ln |\Lambda_i(x_2)| + \dots + \ln |\Lambda_i(x_n)|]; \forall \Lambda_i(\cdot) \neq 0, i = 1, \dots, m$$

donde Df es la matriz jacobiana asociada al sistema dinámico y $\Lambda_i(x_j)$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$ son los valores propios de la matriz jacobiana evaluados en la trayectoria $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Los valores de los exponentes permiten sacar algunas conclusiones sobre la dinámica de un sistema:

1. Si todos los exponentes son negativos, entonces existe un punto fijo atractor.
2. Si algunos exponentes son nulos y otros son negativos, el atractor es un ciclo límite.
3. Si al menos un exponente de Lyapunov es positivo, las soluciones divergen exponencialmente dando lugar a un comportamiento caótico.

Por tanto, un sistema dinámico es caótico si al menos uno de sus exponentes de Lyapunov es positivo.

La característica de sensibilidad a las condiciones iniciales que tienen los sistemas dinámicos caóticos también se conoce con el nombre de **efecto mariposa** para indicar que el aleteo de las alas de una mariposa en Tokio podría causar un tornado en Texas. Pequeñas causas darán lugar a grandes efectos y por tanto, la predicción de la evolución de un sistema dinámico caótico sólo tendrá validez para periodos de tiempo muy cortos.

2.6.2 Geometría Fractal

Un sistema dinámico caótico se caracterizará porque sus soluciones se estabilizarán en un atractor extraño y tendrán exponentes de Lyapunov positivos; además, el atractor al que convergen tendrá una estructura geométrica especial, formada por el continuo estirado y plegado del espacio de fases. En este sentido, un atractor extraño es un objeto geométrico, mucho más complejo que las formas lisas estudiadas por la geometría euclídea, que necesita para su adecuada caracterización de la aplicación de un **nuevo concepto de medida** conocido como **dimensión fractal**.

La diferencia entre los objetos fractales, como los atractores extraños, y los caracterizados por la geometría clásica se encuentra en la noción de **dimensión**. Por ejemplo, la **dimensión topológica** define la dimensión de un objeto por la forma en que éste llena el espacio en las tres coordenadas: alto, ancho y largo, asignando los números enteros 0,1,2 y 3 a las dimensiones que el objeto ocupe en el espacio: la dimensión topológica de un punto es 0; una línea ocupa el espacio en longitud y su dimensión topológica es 1; una superficie ocupa el espacio en ancho y largo, y su dimensión topológica es 2; un volumen llena el espacio en ancho, largo y alto, y su dimensión topológica es 3. La medida de un objeto asociada a su dimensión topológica estará de acuerdo con su longitud, área y volumen.

En las formas irregulares las mediciones hechas en escalas de diferentes longitudes aumentarán a medida que las escalas de medición decrecen. Por ejemplo, la figura fractal conocida como **copo de nieve de Koch** (Koch, H., 1906) es una figura geométrica construida agregando partes a un triángulo equilátero original cuyos lados tienen longitud 1. El proceso de construcción consiste en remover el tercio medio de cada lado del triángulo y reemplazar cada una de estas piezas por dos triángulos de igual longitud. Al iterar el proceso anterior en la figura resultante se obtendrá una línea infinitamente plegada y de longitud infinita, que encierra un área finita.

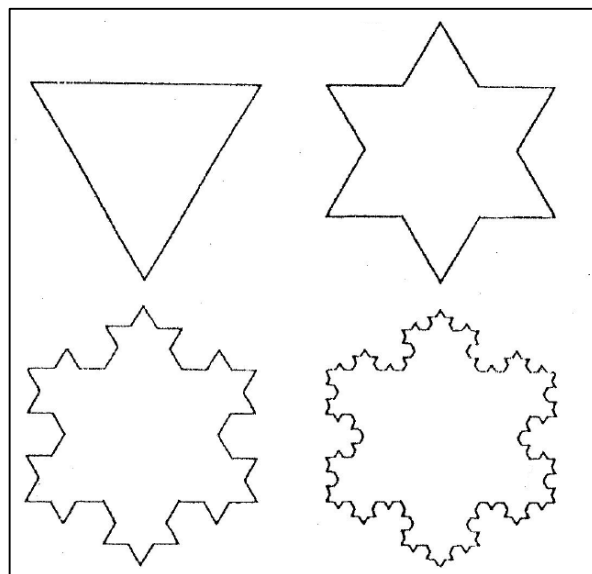


Figura 2.9. Copo de nieve de Koch

Por ser una línea, tendrá una dimensión topológica igual a 1. A medida que disminuya la escala de medición, su longitud tenderá a crecer hasta infinito y por tanto no será posible obtener una medida de su longitud asociada a la dimensión topológica. La longitud no será el concepto adecuado para medir la figura, pero tampoco lo sería el área ya que seguiría siendo una línea aunque en su continuo plegamiento ocupe un mayor espacio³⁰.

La dimensión fractal se aplica así a las formas irregulares que no pueden ser medidas con los conceptos de longitud, área y volumen ya que la irregularidad hace que ocupen el espacio de una forma diferente y que su longitud, área o volumen aumente a medida que la escala de medición decrece. Mandelbrot (1983) dio el nombre de **Fractal** a la geometría que estudia las formas irregulares; la palabra proviene del latín **fractus** que significa roto o fracturado.

Una característica de algunos conjuntos fractales es que son **autosimilares**, es decir, que al observar partes cada vez más pequeñas dentro de un conjunto, se puede continuar observando la estructura completa del conjunto, esto es, toda la estructura se repite sin importar la escala a la que se observe.

Los fractales autosimilares se pueden construir agregando o quitando partes al conjunto de forma repetitiva. El ejemplo clásico de conjunto fractal es el **Conjunto de Cantor** (Cantor, G., 1884) el cual se genera por la iteración de una sola operación sobre una línea de longitud 1 y removiendo el tercio medio de cada segmento de la línea anterior.

³⁰ Lo mismo sucedería con una solución caótica dentro del atractor extraño; la solución tendrá una longitud infinita a pesar de encontrarse en una región acotada del espacio de fases; el periodo de esta solución tenderá a infinito y llenará más espacio, por tanto el espacio que llena deja de ser el de una línea, para aproximarse al de una superficie pero sin llegar a serlo.



Figura 2.10. Conjunto de Cantor

En cada paso, un segmento es remplazado por dos segmentos que son $1/3$ de longitud del segmento anterior. Con el incremento del número de iteraciones, el número de líneas (de tercios medios) separadas tiende a infinito mientras que la longitud de cada línea tiende a cero. Si se observan las partes más pequeñas del conjunto ampliando la escala de observación, éstas serán similares a las observadas con una escala menor. Esta característica de los objetos fractales se conoce como **autosemejanza**.

El conjunto de Cantor está compuesto por puntos que tienen dimensión topológica 0, pero la unión de infinitos puntos forman una línea cuya dimensión topológica es 1; se puede considerar que el conjunto de Cantor es un conjunto de puntos, cuya dimensión es cero pero que no llega a ser una línea; es una figura geométrica que se encuentra entre las dimensiones 0 y 1³¹.

³¹ La órbita de un sistema dinámico será un conjunto de puntos cuya dimensión topológica es cero pero de dimensión fractal mayor que cero.

2.6.2.1 Dimensión de Hausdorff

Una forma de hallar la dimensión de un objeto irregular vendrá dada por la dimensión de Hausdorff, la cual usa como medida del conjunto su recubrimiento o enlozado con infinitos subconjuntos de área arbitrariamente pequeña, los cuales permitirán capturar toda la estructura del conjunto con todas sus particularidades de rugosidades, relieves, irregularidades, etc.

Siguiendo a Guzmán, M., Martín, M., Morán, M., & Reyes, M. (1993, p. 32-35), dado un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ y un número real positivo δ , diremos que una familia $\{A_i\} \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots$ de subconjuntos de \mathbb{R}^n es un δ – *recubrimiento* de E si la unión de tales subconjuntos contiene a E :

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad [2.43]$$

Y el diámetro de todos los miembros del recubrimiento es menor o igual que δ ,

$$|A_i| \leq \delta; \forall i = 1, 2, \dots$$

siendo $|\cdot|$ la norma euclídea.

Dado un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ y un número real $s > 0$, definimos:

$$H_{\delta}^s(E) = \text{ínfimo} \{ \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|^s : \{A_i\} \text{ es } \delta - \text{recubrimiento de } E \} \quad [2.44]$$

número que mide el s – *tamaño* del conjunto E , es decir, mide el conjunto E ignorando las irregularidades de tamaño menor que δ .

Haciendo que $\delta \rightarrow 0$ aparecerán irregularidades de tamaño cada vez menor, además $H_{\delta}^s(E)$ aumenta pues es un ínfimo tomado cada vez sobre una clase más restringida de recubrimientos y por tanto existe el límite:

$$H^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{\delta}^s(E) \quad [2.45]$$

que puede ser finito o infinito.

$H^s(E)$ es la medida s – *dimensional* de Hausdorff. La dimensión de Hausdorff será aquella ley de potencia que relaciona al objeto con su parte cuando éste es observado a escalas cada vez más pequeñas y corresponderá a un valor numérico que generalmente es un número fraccional.

Los objetos fractales se definen como aquellos para los cuales su dimensión topológica es estrictamente menor que su dimensión de Hausdorff. La conexión entre caos y fractales es precisamente que los sistemas caóticos presentan equilibrios dinámicos o atractores extraños que tienen estructura fractal.

En la práctica, existen diferentes algoritmos para intentar medir esta dimensión de Hausdorff. Pasamos a continuación a analizar algunos de ellos.

2.6.2.2 Dimensión Box-Counting

La dimensión por **recuento de cajas** o **box-counting** también usa el concepto de recubrimiento de un objeto geométrico para obtener una medida del objeto; su cálculo emplea hiper-cubos de lado ε como recubriendo, siendo $N(\varepsilon)$ el número de hiper-cubos necesarios para cubrir un conjunto S . La dimensión box-counting del conjunto S estará definida por:

$$D_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} \quad [2.46]$$

A medida que el tamaño ε de los hiper-cubos (considerados “cajas” en el cálculo de la dimensión) decrece, el número necesario de cajas $N(\varepsilon)$ necesarias para recubrir un objeto geométrico se incrementa, siendo el exponente de escala la dimensión del objeto.

(i) dimensión box-counting de una línea:

Una figura de dimensión topológica 1 (una línea o una curva) y de longitud L podrá ser recubierta con $N(\varepsilon)$ cajas unidimensionales de longitud ε :

$$N(\varepsilon) = L(1/\varepsilon)$$

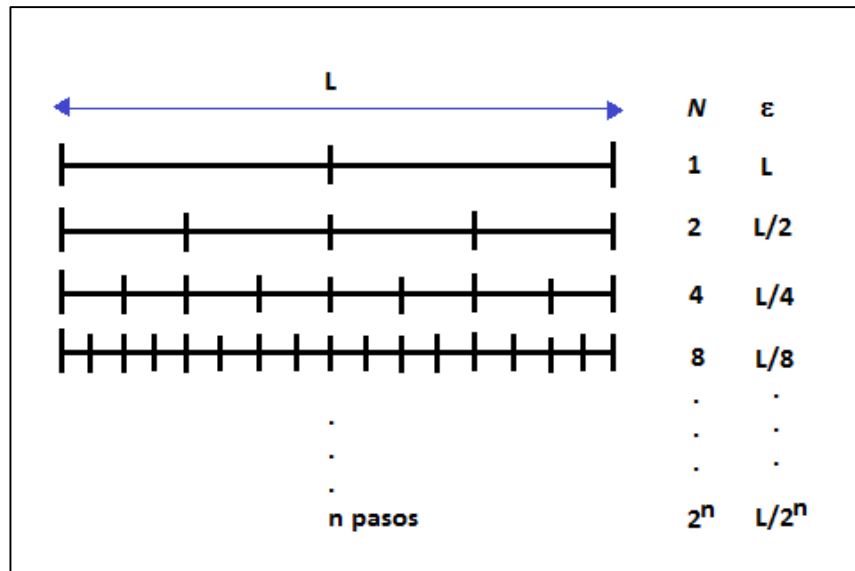


Figura 2.11. Dimensión box-counting de una línea.

(ii) dimensión box-counting de un cuadrado:

Una figura de dimensión topológica 2 de lado L podrá ser recubierta por $N(\varepsilon) = L^2(1/\varepsilon)^2$.

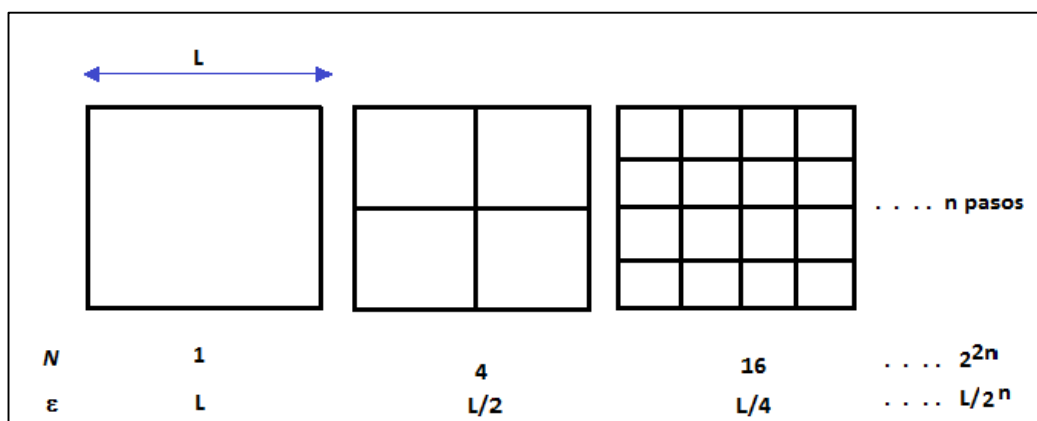


Figura 2.11. Dimensión box-counting de un cuadrado.

(iii) dimensión box-counting de un cubo:

Una figura de dimensión topológica 3 podrá ser recubierta por $N(\varepsilon) = L^3(1/\varepsilon)^3$ y, en general, para dimensiones mayores, la expresión que relaciona el tamaño ε de cajas y el número $N(\varepsilon)$ de cajas necesarias para recubrir un objeto geométrico será $N(\varepsilon) = L^D(1/\varepsilon)^D$, donde el exponente es la dimensión del objeto. Tomando logaritmos en esta expresión se obtendrá la dimensión D :

$$D = \frac{\log N(\varepsilon)}{\log L + \log(1/\varepsilon)} \quad [2.47]$$

Esta expresión tenderá a un límite cuando ε tienda a cero y será igual a la expresión dada en [2.46].

Los objetos de la geometría clásica tendrán como característica que su dimensión fractal coincidirá con su dimensión topológica $D_f = D_t$; por tanto, un **objeto fractal** será todo aquel objeto para el cual dimensión topológica será menor que su dimensión fractal $D_t < D_f$.

2.6.2.2.1 Dimensión de algunos conjuntos fractales

(i) conjunto de Cantor

Haciendo uso de la dimensión box-counting para calcular la dimensión del conjunto de Cantor, tomamos una caja unidimensional de lado ε ; el número de cajas para recubrir $\varepsilon = 1$ será $N(\varepsilon) = 1$, para $\varepsilon = 1/3$ será $N(\varepsilon) = 2$, para $\varepsilon = 1/9$ será $N(\varepsilon) = 4$ y, en general, $\varepsilon = (1/3)^n$ para $N(\varepsilon) = 2^n$. Tomando el límite $n \rightarrow \infty$ o, igualmente el límite $\varepsilon \rightarrow 0$, obtendremos la dimensión:

$$D_c = \lim_{n \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log 2^n}{\log 3^n} \approx 0.63$$











		N	ε
		1	1
		2	$1/3$
		4	$1/9$
		\cdot	\cdot
		\cdot	\cdot
		\cdot	\cdot
		\cdot	\cdot
		\cdot	\cdot
		\cdot	\cdot
∞		2^n	$(1/3)^n$

Figura 2.12. Dimensión box-counting del conjunto de Cantor.

(ii) Curva de Koch

La curva de Koch se construye agregando partes al conjunto original. Un segmento original es remplazado por cuatro segmentos de longitud $1/3$. El número de cajas necesario para recubrir $\varepsilon = (1/3)^n$ segmentos de la curva será de $N(\varepsilon) = 4^n$. La dimensión box-counting del conjunto será:

$$D_c = \lim_{n \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log 4^n}{\log 3^n} \approx 1.26$$

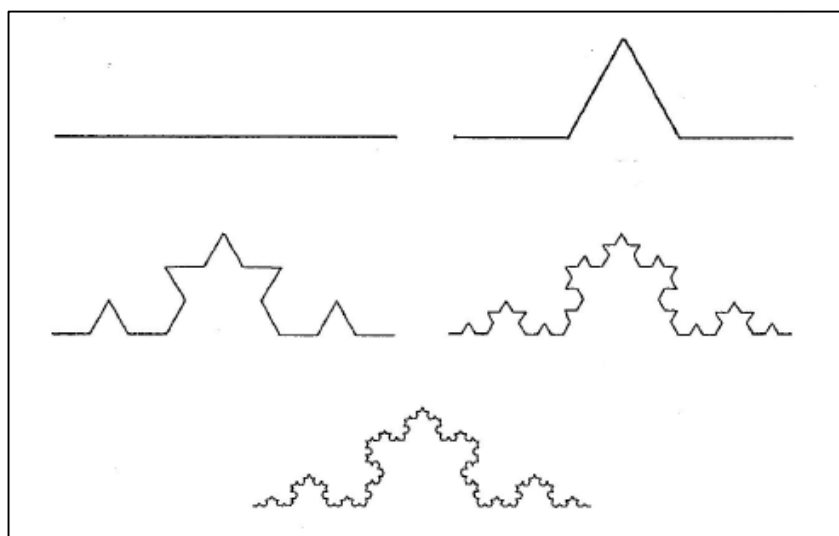


Figura 2.13. Curva de Koch.

(iii) Triángulo de Sierpinski

La construcción del triángulo de Sierpinski puede obtenerse extrayendo el triángulo central de un triángulo equilátero original; la longitud de cada triángulo removido es $1/2$. En cada paso un triángulo genera tres triángulos nuevos. El número de cajas necesario para recubrir $\varepsilon = (1/2)^n$ segmentos de la figura será de $N(\varepsilon) = 3^n$. La dimensión box-counting del conjunto será:

$$D_c = \lim_{n \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log 3^n}{\log 2^n} \approx 1.58$$

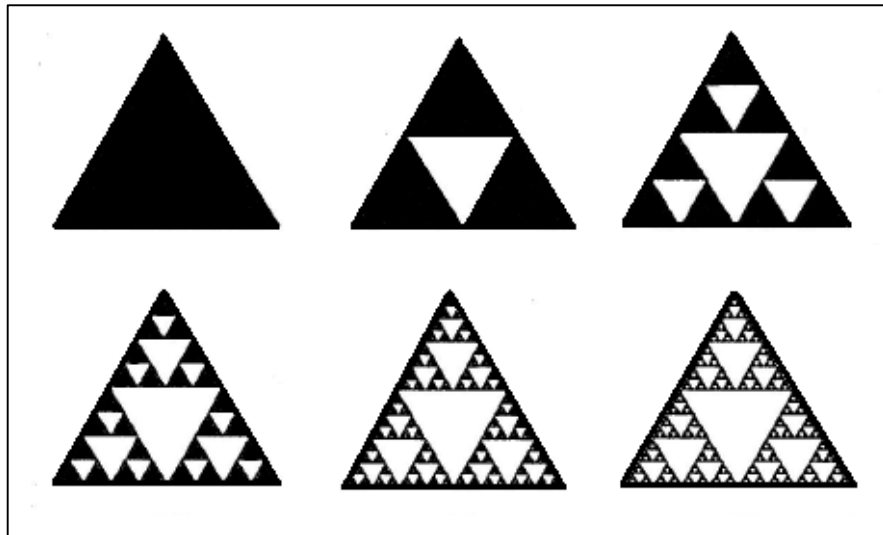


Figura 2.14. Triángulo de Sierpinsky

En el proceso de construcción del triángulo de Sierpinski se parte de un triángulo cuya dimensión topológica es 2 pero a medida que se van extrayendo triángulos más pequeños se va obteniendo un objeto que es algo menos que una superficie, obteniéndose un conjunto geométrico situado entre la dimensión 1 y 2³².

³² El conjunto de Cantor, la curva de Koch y el triángulo de Sierpinsky son ejemplos de fractales *homogéneos* puesto que consisten en una figura geométrica que se repite a escalas cada vez más reducidas; su dimensión fractal es la misma para todas las escalas. En el mundo real es difícil encontrar motivos que se repiten en todas las escalas, los objetos fractales son *heterogéneos*, el objeto puede tener diferente dimensión en escalas diferentes. Estos objetos más complicados se los llama *multifractales*.

2.6.2.3 Dimensión de Lyapunov

La obtención de la dimensión basada en la geometría del conjunto (Hausdorff – box-counting) sólo toma en consideración la forma del conjunto bajo medición; Sin embargo, no son conceptos completamente adecuados para determinar la dimensión de un atractor pues no tienen en cuenta sus **aspectos dinámicos**. Cuando se tiene un atractor se buscará que la dimensión refleje la **frecuencia** con que las órbitas entran en cada hiper-cubo o recubrimiento del conjunto. (Bertuglia, C., & Vaio, F., 2005, p. 184).

La dimensión de Lyapunov es un método que empleará los exponentes de Lyapunov para calcular la dimensión del atractor. Considerando un sistema dinámico disipativo de dos dimensiones, con exponentes de Lyapunov λ_1 y λ_2 negativos, se tendrá que todos los puntos iniciales serán atraídos hacia un atractor de tipo punto fijo que tendrá una dimensión igual a cero. Por el contrario, si $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$ estaremos ante un atractor extraño que se expande en una dirección y se contrae en otra. La dimensión de Lyapunov d_L para este sistema está definida como:

$$d_L = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad [2.48]$$

Esta expresión se conoce como la relación Kaplan-Yorke y es generalizable para sistemas dinámicos de dimensiones mayores:

$$d_L = j + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_j}{|\lambda_{j+1}|} = \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|} \quad [2.49]$$

Es decir, la dimensión de Lyapunov se definirá como la suma de los primeros j exponentes de Lyapunov ordenados de mayor a menor y j indicará los exponentes de Lyapunov no negativos³³. (Baker, G., & Gollub, J., 1994)

³³ Otra forma de medir la dimensión de un atractor extraño es con la *dimensión de información* la cual depende de la distribución de los puntos dentro del atractor.

2.6.2.4 Dimensión de correlación

Para datos experimentales (series de tiempo) o sistemas dinámicos de dimensiones mayores, la dimensión de correlación (Grassberger, P., & Procaccia, I., 1983) es un tipo de dimensión más eficiente de calcular que la dimensión box-counting y por ello es ampliamente usado para estimar la dimensión fractal de un objeto.

Suponiendo que existe un conjunto que contiene muchos puntos dispersos en él, el número típico de vecinos de un punto dado variará más rápidamente con la distancia desde este punto si el conjunto tiene una dimensión mayor. Es una forma de medir la correlación espacial entre un par de puntos más que la correlación temporal entre dos instantes de tiempo.

La dimensión de correlación se calcula a partir de la **función de correlación** $C(R)$ definida por:

$$C(R) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N H(R - |x_i - x_j|) \right] \quad [2.50]$$

Donde x_i y x_j son puntos en el atractor, $H(y)$ es la función Heaviside (1 si $y \geq 0$ y 0 si $y < 0$), y N es el número de puntos elegidos aleatoriamente dentro de todo el conjunto.

La función de Heaviside cuenta el número de puntos en un radio R del punto x_i y $C(R)$ da la fracción promedio de puntos dentro de R . (Baker, G., & Gollub, J., 1994, p. 116). La **dimensión de correlación** (d_c) es el factor de escala del número de puntos cercanos entre sí a medida que disminuye la distancia máxima considerada, ya que se cumple la ley de potencia entre la variación entre $C(R)$ y R :

$$C(R) \sim R^{d_c} \text{ cuando } R \rightarrow 0 \quad [2.51]$$

Gráficamente la dimensión de correlación queda representada por la pendiente de la línea en el gráfico de $\log C(R)$ vs $\log R$. La gráfica de la pendiente puede diferir de una línea recta para valores altos y bajos de R pues cuando R se aproxima al tamaño del espacio de fases, $C(R)$ se satura en la unidad pues todos los puntos están incluidos en el círculo; cuando R es

más pequeño que el espacio entre los puntos solo un punto cae en cada círculo y $C(R)$ tiene un nivel de $1/N^2$.

2.7 Algunos sistemas dinámicos caóticos

En este apartado mostraremos algunos ejemplos de sistemas dinámicos que pueden presentar comportamientos caóticos, algunos en tiempo discreto y otros en tiempo continuo

2.7.1 sistemas dinámicos discretos

2.7.1.1 aplicación logística

La aplicación logística es usada ampliamente para ilustrar el comportamiento complejo generado por un sistema dinámico relativamente simple. Presenta las características distintivas de un sistema dinámico caótico: está generado por un sistema dinámico determinista no lineal, presenta comportamiento aperiódico e irregular con apariencia de aleatoriedad, es sensible a las condiciones iniciales y converge a un atractor extraño.

La aplicación logística tiene su origen en la ecuación propuesta por Robert Malthus (1798) para describir el crecimiento de una población:

$$x(k+1) = \mu x(k) \quad [2.52]$$

Donde el valor de $x(k+1)$ representa el tamaño de una población durante un periodo de tiempo³⁴, la cual depende del tamaño de la población en el periodo anterior $x(k)$; μ es el término que representa un factor de crecimiento no limitado por el medio. La ecuación [2.52] describe un proceso en el cual la población de cualquier periodo es proporcional a la del periodo anterior, representando así una relación lineal cuya solución muestra un crecimiento exponencial de la población:

³⁴ La ecuación de crecimiento poblacional de Malthus tiene su correspondiente versión en tiempo continuo: $\frac{dx}{dt} = \mu x$ con solución analítica $x(t) = ce^{\mu t}$.

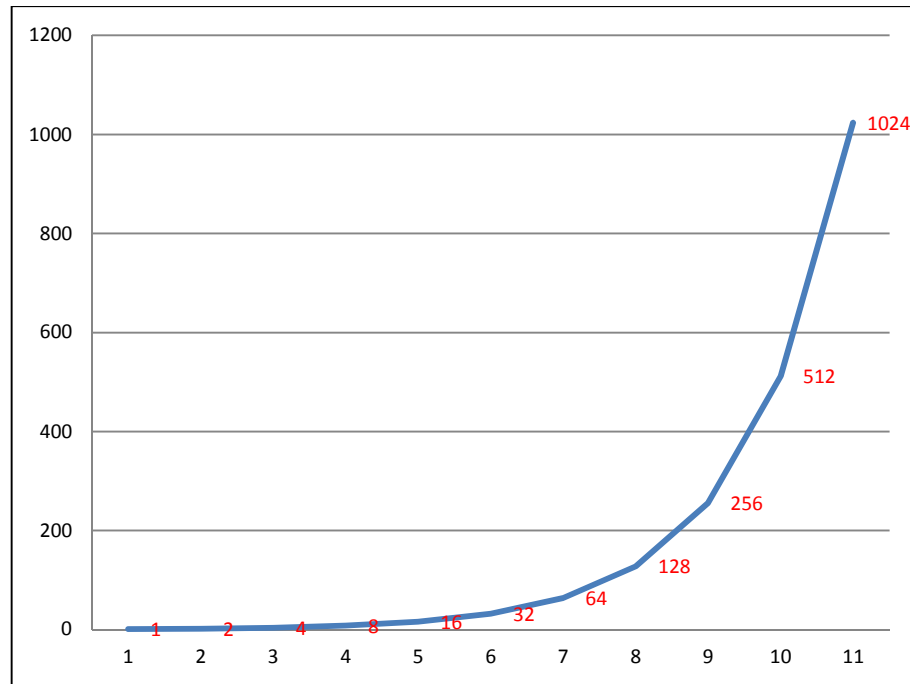


Figura 2.15. Crecimiento exponencial logístico

Verhulst (Verhulst, P-F, 1845) añadió a la ecuación [2.52] el término $(1 - x)$, que hace que la ecuación sea no lineal y que modeliza un comportamiento más realista en el cual la cantidad de recursos disponibles pone un límite al crecimiento de la población:

$$x(k+1) = \mu x(k)(1 - x(k)) \quad x \in [0,1], \mu \in [0,4] \quad [2.53]$$

La ecuación [2.53] representa un sistema dinámico discreto de una sola variable de estado que toma valores en el rango $0 \leq x \leq 1$ y un parámetro μ que se encuentra en el rango $0 \leq \mu \leq 4$. Modeliza una situación en la cual la evolución de la variable de estado es una función de la variable en un instante anterior; el cambio en el estado del sistema está determinado por la ley de movimiento [2.53]. El espacio de fases de la aplicación es el intervalo $[0,1]$ de la recta real.

La ecuación logística, aplicada al modelo poblacional muestra que el número de individuos que forman una población podrá llegar a un valor máximo de crecimiento compatible con la capacidad de soporte del medio ambiente, y al llegar a dicho valor, la población sólo podrá descender.

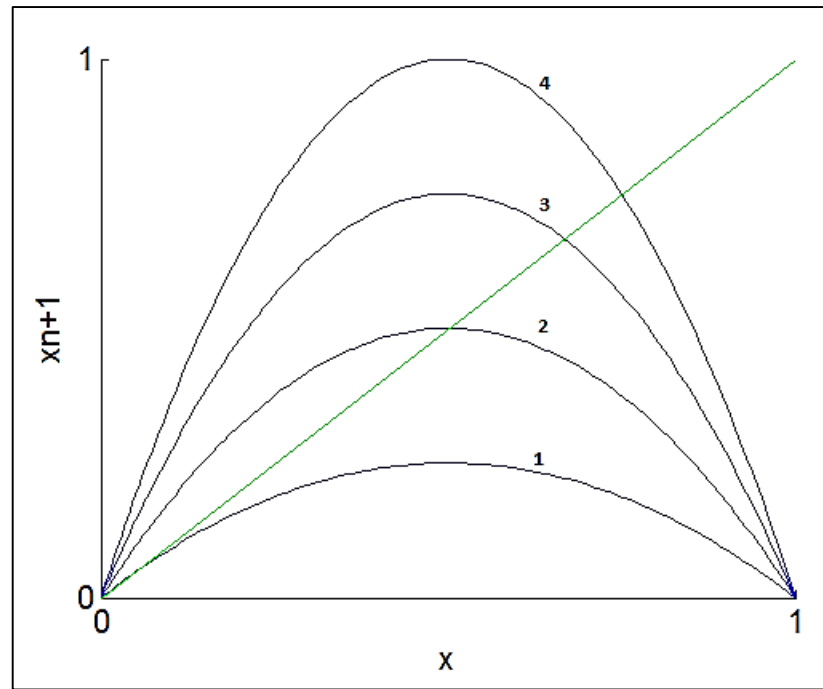


Figura 2.16. Aplicación logística para diferentes valores de μ . La línea diagonal corresponde a $x(k+1) = x(k)$

La gráfica de la aplicación logística es una curva parabólica cuya altura se ajusta a través del parámetro de control μ . La forma de campana de la aplicación está producida por el término no lineal $(1-x)$ que genera dos efectos que se oponen: el incremento en el valor de $x(k+1)$ hace que la curva se eleve hasta llegar a un punto máximo ubicado en $f(1/2) = \mu/4$ luego del cual, el término no lineal hace que la curva empiece a descender.

2.7.1.1.1 dinámica comparativa de la aplicación logística

A continuación se mostrarán los distintos regímenes de comportamiento de la aplicación logística desde el punto de vista cualitativo para los posibles valores de μ . Se podrá ilustrar cómo la aplicación podrá tener un comportamiento de dinámica simple y evolucionar también a un comportamiento de dinámica compleja cuando cambia el valor del parámetro del sistema.

La solución gráfica podrá obtenerse dando un valor de inicio a la variable $0 \leq x \leq 1$ e iterando el resultado obtenido; conectando las sucesivas iteraciones se obtendrá una imagen de la solución.

(i) Comportamiento estable: $0 < \mu < 3$

En este rango de valores, la solución de la ecuación logística se estabilizará en un único valor. El atractor estará constituido por un único punto.

- $0 < \mu < 1$ el único punto fijo es $x_\mu^* = 0$. Todas las trayectorias que se inicien en la cuenca de atracción $0 \leq x \leq 1$, se estabilizarán en este atractor.
- $1 < \mu < 3$ hay dos puntos fijos $x_\mu^* = 0$ cuando $0 \leq \mu \leq 4$ y $x_\mu^* = 1 - \frac{1}{\mu}$ cuando $1 \leq \mu \leq 4$.

Los puntos fijos de la aplicación se hallan resolviendo la ecuación $\mu x(1 - x) = x$.³⁵ Gráficamente estos puntos fijos se encuentran en la intersección de la línea diagonal y la curva de la aplicación en donde $x = f_\mu(x)$.

Estabilidad de los puntos fijos

La estabilidad dependerá de la primera derivada de la aplicación. La derivada de la aplicación respecto a x es:

$$f'(x) = \mu(1 - 2x) \quad [2.54]$$

- La derivada [2.54] evaluada en $x_\mu^* = 0$ será $f'(0) = \mu$.

El punto fijo $x_\mu^* = 0$ es estable cuando $0 < \mu < 1$ e inestable cuando $1 < \mu \leq 4$.

Para $0 < \mu < 1$ el punto $x_\mu^* = 1 - \frac{1}{\mu}$ no estará en el intervalo $[0,1]$, i.e. se encuentra fuera del dominio de definición de la ecuación (es negativo para $\mu < 1$ y cero para $\mu = 1$) y por tanto $x_\mu^* = 0$ es el único punto fijo en este

³⁵ $x = \mu x(1 - x) \rightarrow 1 = \mu(1 - x) \rightarrow 1 = \mu - \mu x \rightarrow \frac{1-\mu}{\mu} = x_\mu^*$.

intervalo. Si no se producen perturbaciones exógenas, el sistema permanecerá estacionario de forma indefinida en este punto fijo.

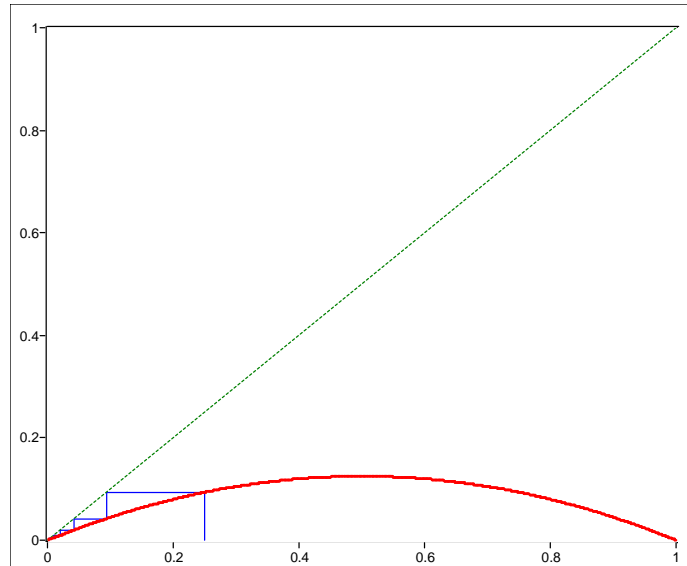


Figura 2.17. Solución gráfica para $\mu = 0.5$

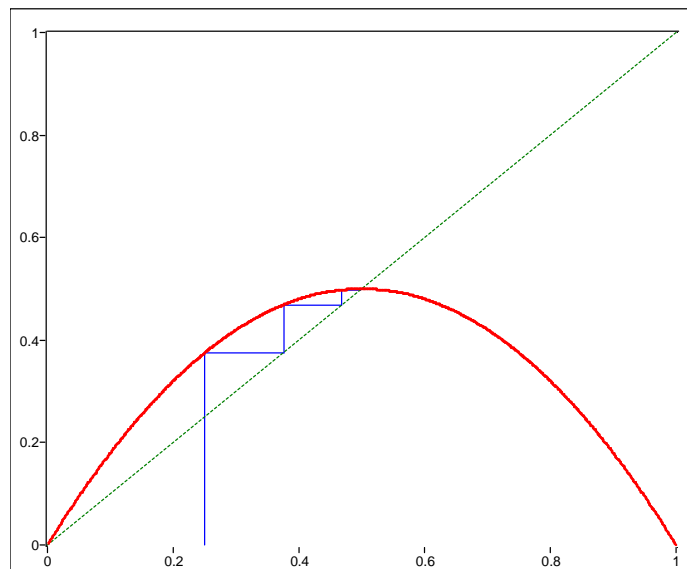


Figura 2.18. Solución gráfica para $\mu = 2.0$. La solución siempre se estabilizará en un punto de equilibrio que es el atractor del sistema.

- La derivada [2.54] evaluada en $x_\mu^* = 1 - \frac{1}{\mu}$ será $f' \left(\frac{\mu-1}{\mu} \right) = 2 - \mu$.

Cuando $\mu > 1$ el punto fijo $x_\mu^* = 0$ pierde su estabilidad y deja de ser atractor del sistema, se convierte en repulsor puesto que las trayectorias se alejan de este valor. Todas las trayectorias que se inicien en la cuenca de atracción $0 \leq x \leq 1$, se estabilizarán en el nuevo atractor $x_\mu^* = 1 - \frac{1}{\mu}$. El nuevo punto fijo será estable para $1 < \mu < 3$ e inestable cuando $3 < \mu \leq 4$, para este rango ambos puntos fijos son inestables.

(ii) Comportamiento periódico: $3 < \mu < 3.569945672$

- $\mu = 3$ la solución que se estabilizaba en el atractor $x_\mu^* = 1 - \frac{1}{\mu}$ se bifurca y se estabiliza en un atractor de ciclo límite de periodo dos. (figura 2.19).

Los dos nuevos puntos serán las raíces del factor cuadrático:

$$x_{1,2}^* = \frac{1+\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3}}{2\mu}$$

Correspondientes a la segunda iterada de la ecuación $f^2(x) = f(f(x))$ y se hallan resolviendo $f^2(x) = x$. Para soluciones reales la cantidad dentro de la raíz no debe ser negativa.

- $\mu = 3.44948$, la solución que se estabilizaba en un ciclo de periodo-2 se bifurca nuevamente y oscila entre cuatro valores.

Los puntos periódicos x_1^* y x_2^* pierden su estabilidad y aparecen 4 nuevos puntos, formándose un nuevo ciclo límite de periodo 4 (figura 2.20). Todas las trayectorias que se inicien en la cuenca de atracción $0 \leq x \leq 1$, se estabilizarán en este atractor recorriendo secuencialmente los cuatro estados del sistema. Estos cuatro puntos son el resultado de $f^4(x) = f(x)$.

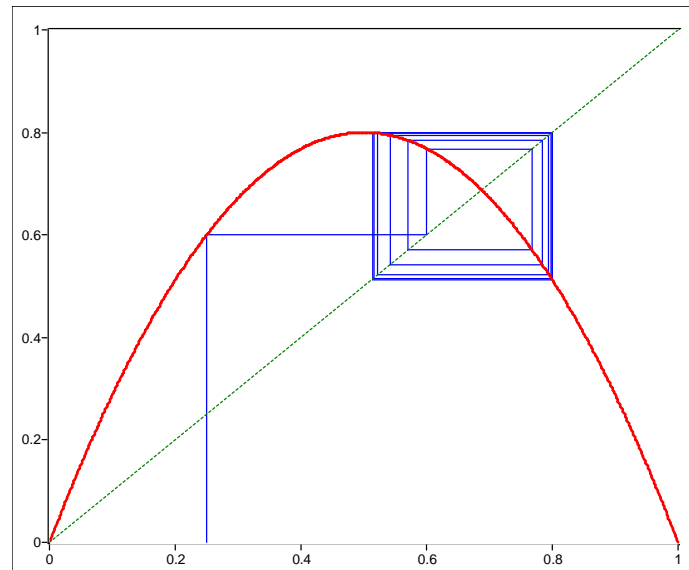


Figura 2.19. Solución gráfica para $\mu = 3.2$

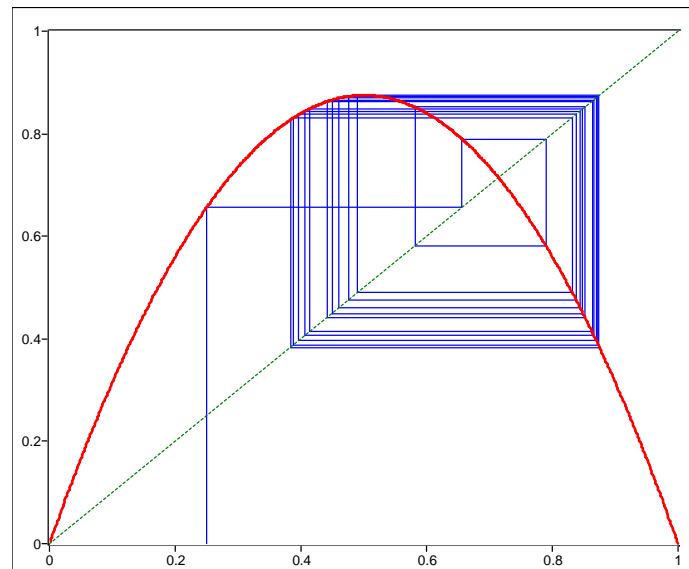


Figura 2.20. Solución gráfica para $\mu = 3.5$

A medida que va aumentando el valor del parámetro μ , el sistema duplica el número de periodos de oscilación, pasando a un periodo-4, periodo-16, periodo-32..., etc, que la trayectoria irá recorriendo secuencialmente hasta un valor de $\mu = 3.5699$ en el cual los valores de oscilación de la trayectoria parecen no repetirse. El doblamiento de periodo se considera como una ruta hacia el caos³⁶ y se va produciendo por un factor de 2^n .

³⁶ Este tipo de bifurcación, es decir, donde ocurre un doblamiento de periodo, se llaman bifurcaciones *pitchfork* (horca) porque la bifurcación semeja esta forma.

En la secuencia de bifurcaciones hay un punto de acumulación de la secuencia en $\mu_\infty \approx 3.569945672$. Esta secuencia está regida por la *constante de Feigenbaum*³⁷ $\delta = 4.669202$, definida como:

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n}$$

Donde μ_{n-1} , μ_n , μ_{n+1} son tres valores sucesivos de μ en los cuales hay un doblamiento de periodo.

El doblamiento de periodo se encuentra en el dominio de la **dinámica simple**; el comportamiento de **dinámica compleja** empieza a ocurrir para valores de $\mu > \mu_\infty$.

El análisis de dinámica comparativa de la aplicación logística se puede resumir en el gráfico de bifurcación (*Figura 2.21*). El eje horizontal representa los valores de μ y el vertical los valores de x . A medida que aumenta el valor del parámetro μ , se suceden las duplicaciones de periodo hasta llegar al valor límite μ_∞ donde el sistema entra a la región caótica.

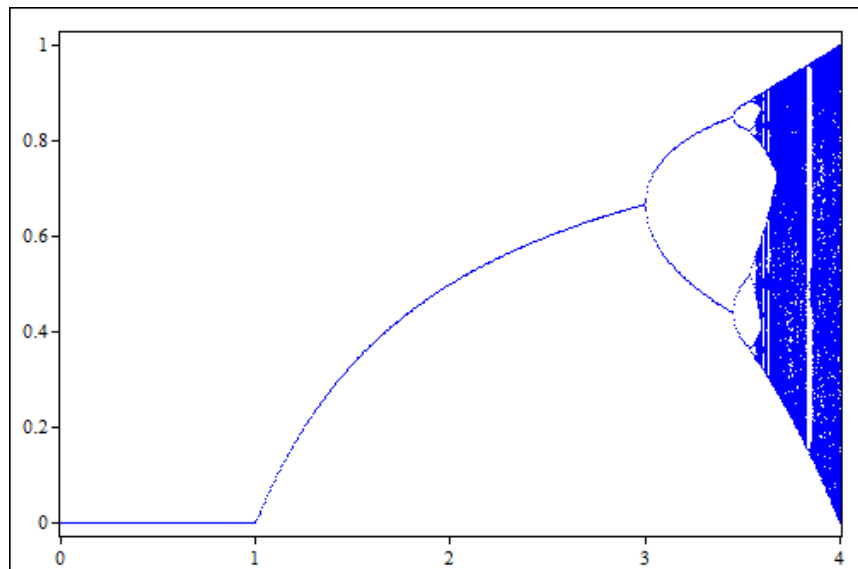


Figura 2.21. Gráfico de bifurcaciones de la aplicación logística.

³⁷ Esta constante aparece en todas las ecuaciones con doblamiento de periodo.

(iii) Comportamiento caótico: $3.569945672 < \mu < 4$

En este rango de valores, la aplicación tiene infinitos puntos periódicos inestables de cualquier periodo.

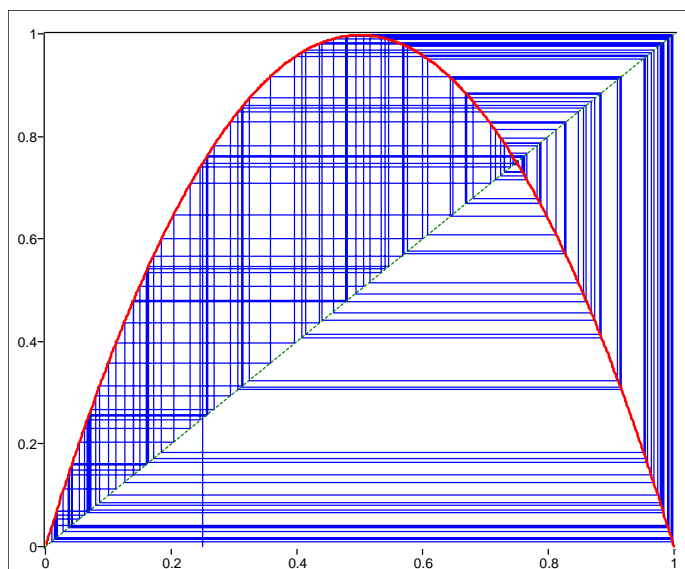


Figura 2.22. Solución gráfica para $\mu = 3.99$

Las soluciones no se estabilizarán en ninguna órbita regular estacionaria o periódica. El nuevo equilibrio dinámico será un atractor extraño. Los puntos fijos y los ciclo límite de periodo finito seguirán siendo equilibrios dinámicos pero serán inestables cuando el sistema se encuentra bajo régimen caótico formando un conjunto denso en el intervalo $[0,1]$.

En un comportamiento de dinámica compleja es posible encontrar soluciones periódicas dentro de la región de comportamiento caótico, es decir, existe **Orden dentro del caos**. La región de comportamiento caótico está interrumpida por intervalos de comportamiento periódico. Uno de estos intervalos ocurre en $\mu = 3.83$ donde aparece una órbita periódica de periodo tres. Li y Yorke (1975) demostraron que un sistema dinámico que tiene órbitas periódicas de cualquier periodo será un sistema dinámico caótico.

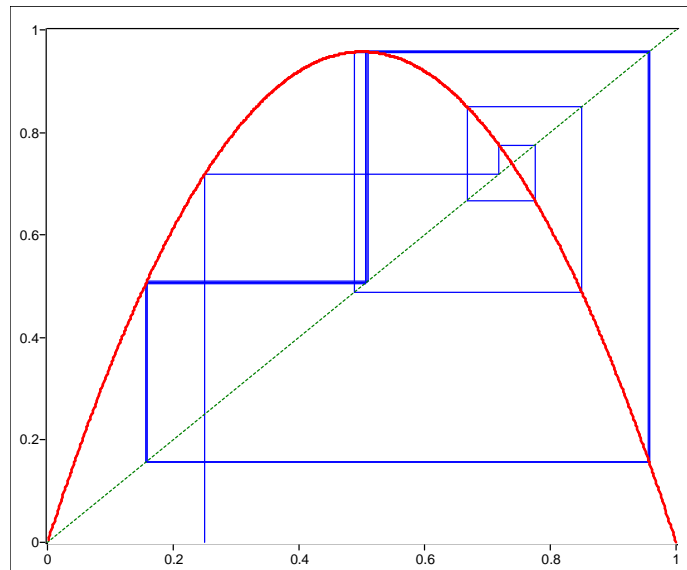


Figura 2.23. Solución gráfica para $\mu = 3.83$

2.7.1.1.2 La aplicación logística y las propiedades del caos

A partir de la observación del comportamiento de la ecuación logística se pueden ilustrar las características del caos determinista:

(i) comportamiento aperiódico generado por un sistema determinista.

La aplicación $x(k+1) = \mu x(k)(1-x(k))$ no tiene componentes aleatorios y sin embargo, exhibe comportamiento aperiódico para valores del parámetro $\mu > 3.569945672$.

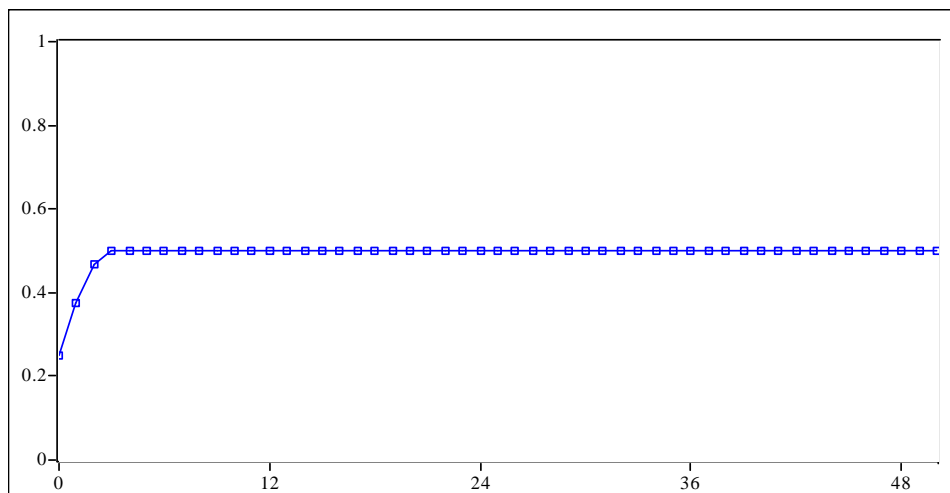


Figura 2.24. $\mu = 2.0$

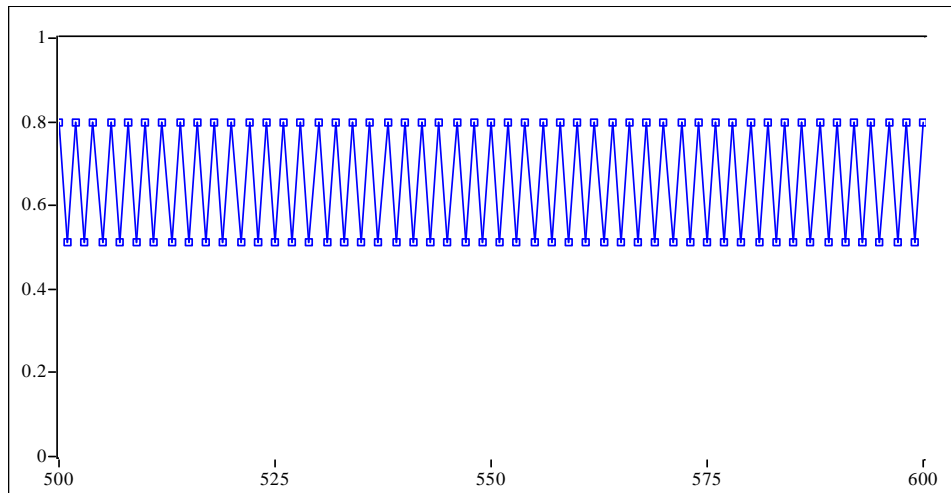


Figura 2.25. $\mu = 3.2$

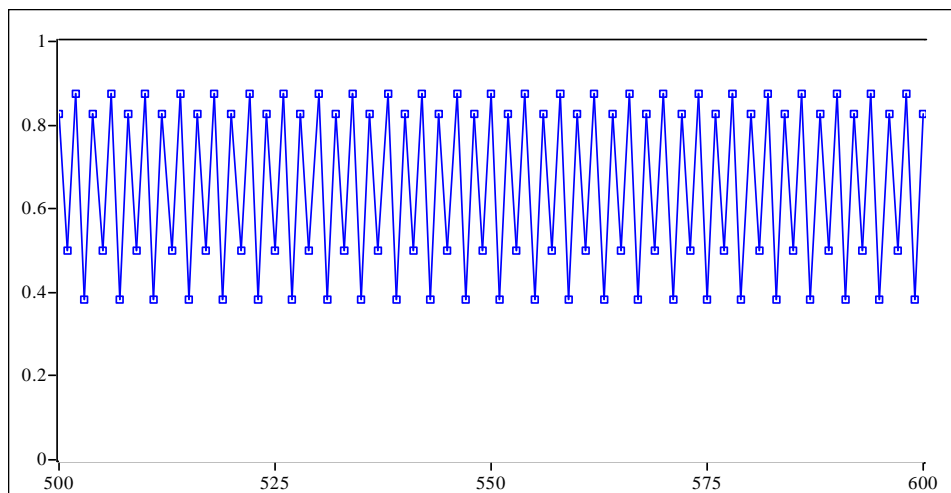


Figura 2.26. $\mu = 3.5$

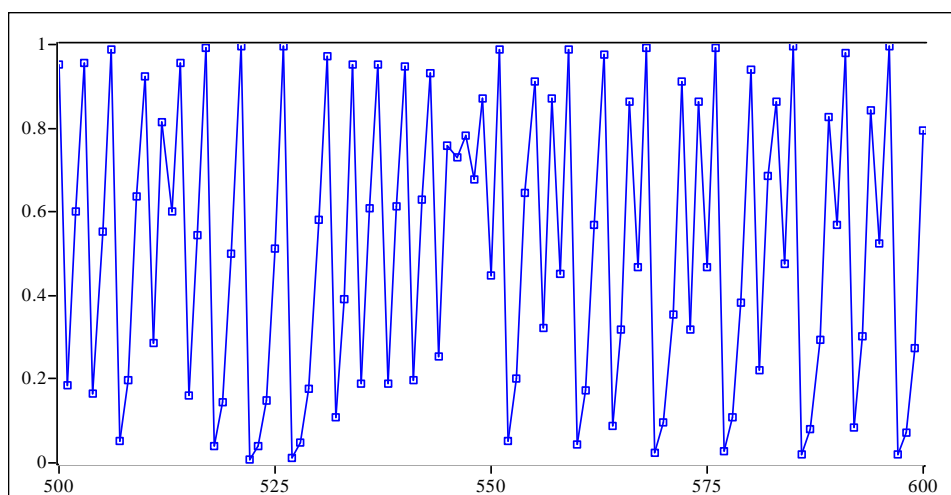


Figura 2.27. $\mu = 3.99$

(ii) sensibilidad a los cambios en las condiciones iniciales

Una característica importante del comportamiento caótico es que las soluciones son sensibles a cambios en los valores iniciales; en la ecuación logística al cambiar levemente la condición inicial $x(0) = 0.25$ (Figura 2.28 color azul) y $x(0) = 0.251$ (Figura 2.28 color rojo) para el mismo valor de $\mu = 3.89$, tenemos dos soluciones diferentes. El cambio mínimo de la condición inicial da como resultado comportamientos completamente diferentes.

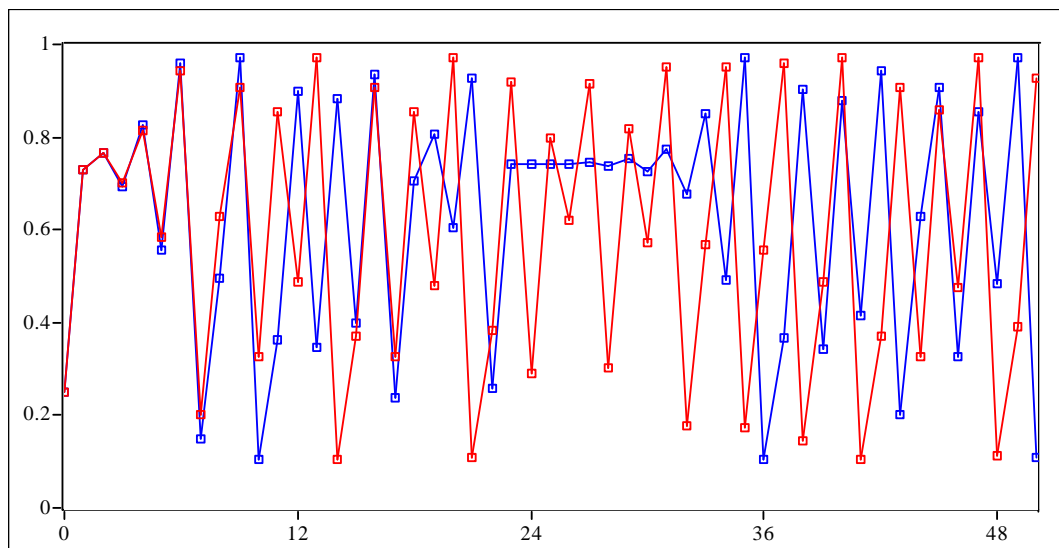


Figura 2.28. Trayectorias temporales distintas para el mismo valor $\mu = 3.89$ que parten de condiciones iniciales levemente diferentes.

La sensibilidad de las soluciones a las condiciones iniciales ocurre porque en el proceso de iteración el resultado de una etapa es el inicio de la siguiente y el término no lineal incrementa los inevitables errores en la medición de las condiciones iniciales; los errores en la medición se acumulan y se van distorsionando a medida que avanza el proceso.

La aplicación es también sensible a cambios muy pequeños en el valor de los parámetros. Por ejemplo, en $\mu = 3$ la solución pasa de converger de un atractor de punto fijo a un atractor de ciclo límite de periodo dos. Los cambios mínimos en los valores de los parámetros producen diferentes comportamientos en las soluciones. El diagrama de feigenbaum (Figura

2.21) recoge el cambio en las soluciones a medida que aumenta el valor del parámetro de la aplicación y los puntos donde se bifurcan dichas soluciones.

(iii) convergencia de las soluciones a atractores extraños. Caos en el sentido de Ruelle.

Las soluciones de la ecuación logística convergen a un atractor extraño para valores de $3.569945672 < \mu < 4$ y se mantienen acotadas dentro del atractor recorriendo infinitos puntos de un espacio finito.

(iv) existencia de soluciones periódicas de periodo tres. Caos en el sentido de Li-Yorke

Para $\mu = 3.835$, esto es, dentro del intervalo de régimen caótico, aparece un ciclo de periodo 3; incrementando levemente el valor de μ , la periodicidad de los sucesivos ciclos pasa a 6, 12, 24, 48, 96, $.. \infty$, en una nueva cascada de duplicación de periodo. En $\mu = 3.739$ se obtiene un ciclo de periodo 5 que se duplicará en periodos 10, 20, 40, 80, $..., \infty$. Por tanto, en la región de comportamiento aperiódico existen valores de μ para los cuales las soluciones de la ecuación logística son periódicas, mostrando que existe orden dentro del caos.

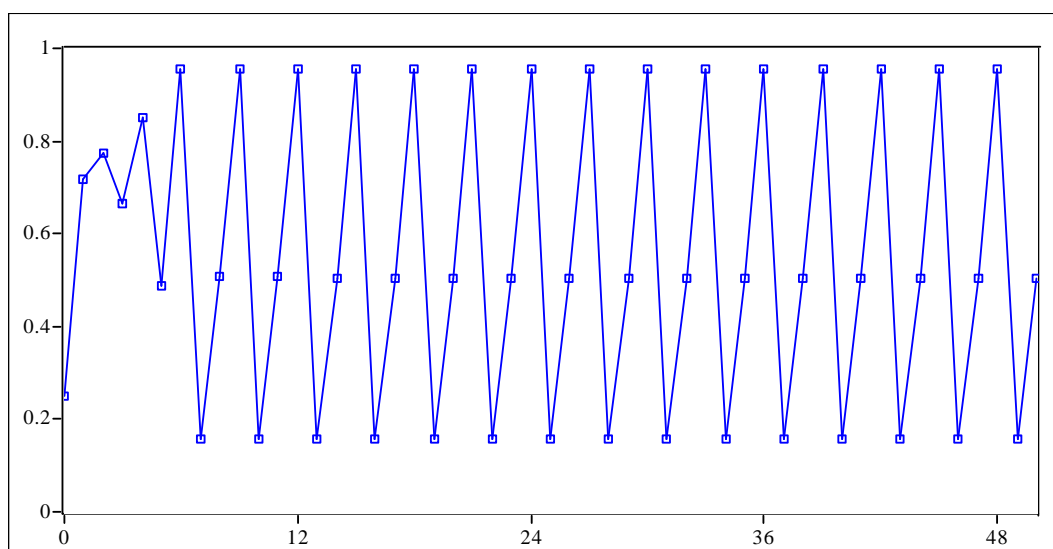


Figura 2.29. Trayectoria temporal que exhibe un ciclo de periodo tres. $\mu = 3.83$.

(v) geometría fractal

La ecuación logística, vista desde el diagrama de bifurcación, repite la misma estructura al variar la escala de observación. Esta es una propiedad característica de los fractales autosimilares.

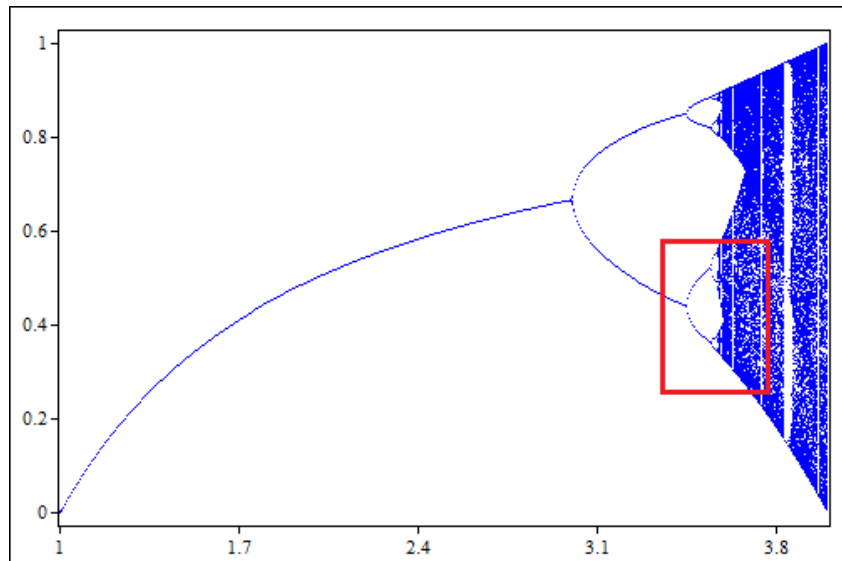


Figura 2.30. Estructura auto similar de la aplicación logística.

2.7.1.2 Aplicación de Hénon

La aplicación de Hénon fue propuesta por Michel Hénon (1976) para modelar en tiempo discreto el sistema formulado inicialmente por Edward Lorenz (1963). Es un sistema en tiempo discreto que consta de dos parámetros reales $\{a, b\}$ y el estado del sistema, descrito por dos variables (x, y) , se transforma por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= a - x_k^2 + by_k \\ y_{k+1} &= x_k \end{aligned} \quad [2.55]$$

con $a > 0$ y $|b| < 1$. El espacio de fases es un espacio de dos dimensiones con ejes x e y .

El diagrama de bifurcación del sistema de Hénon nos muestra los diferentes regímenes de comportamiento del sistema:

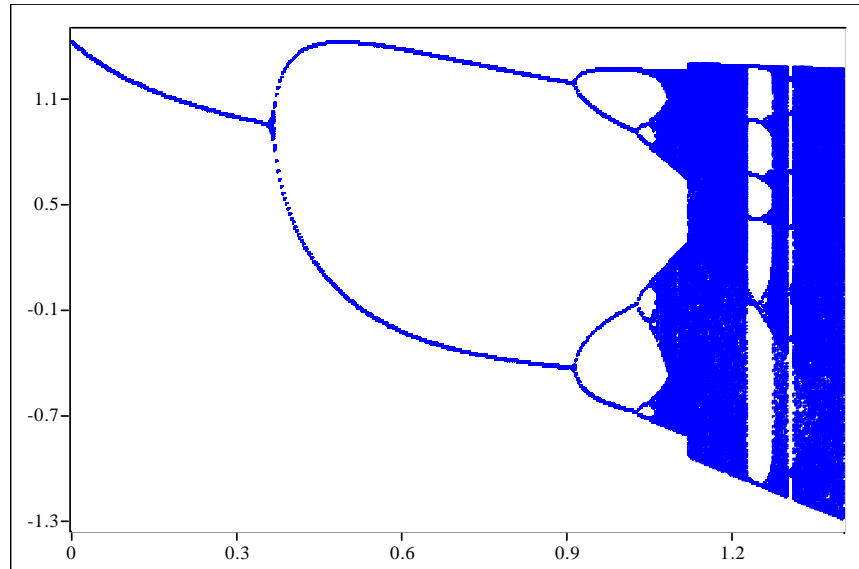


Figura 2.31. Cascada de bifurcaciones de la aplicación de Hénon para $b = 0.3$. En el eje horizontal los valores de a .

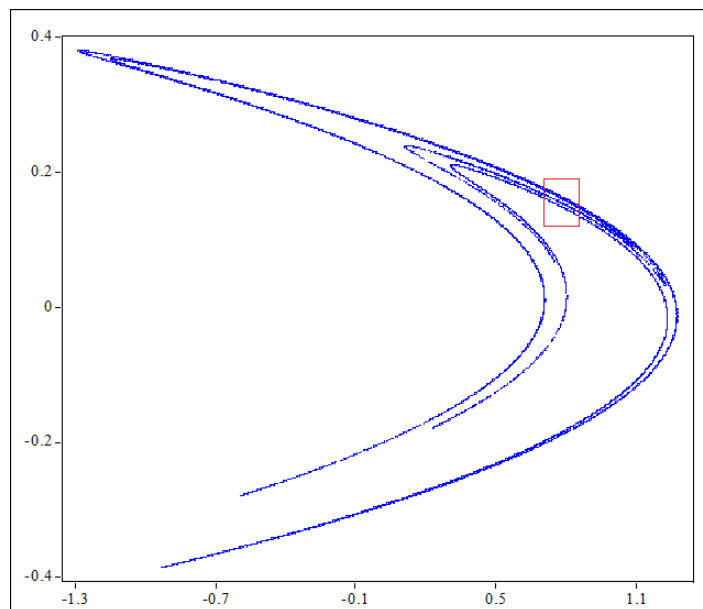


Figura 2.32. Atractor de Hénon para $a = 1.4$ y $b = 0.3$.

La región caótica aparecerá para valores de $a > 1.06$. Haciendo $a = 1.4$ y $b = 0.3$ se obtendrá la conocida imagen del atractor de Hénon. (*Figura 2.32*).

Haciendo un acercamiento en el área de la imagen que contiene el punto fijo x_1 (rectángulo rojo, *Figura 2.32*), se podrá observar que el atractor está constituido por líneas y que al hacer un mayor acercamiento en el área roja de la imagen, aparecerá una estructura semejante al Conjunto de Cantor. El atractor de Henón sería de esta forma una figura autosemejante constituida por infinitos puntos.

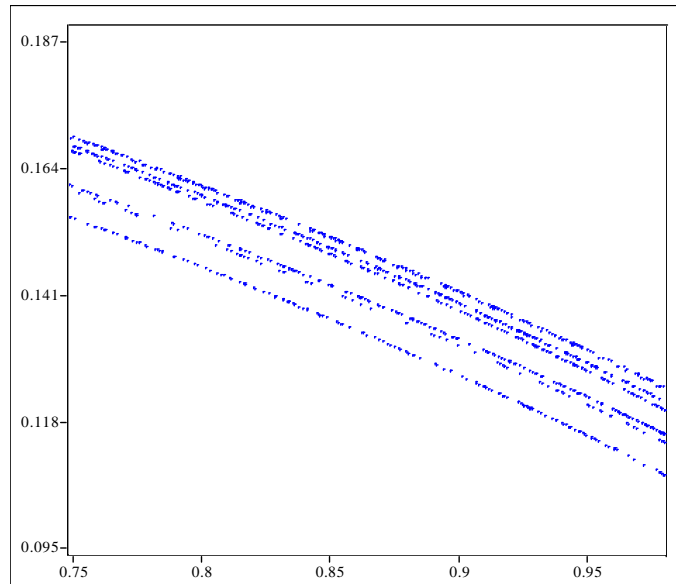


Figura 2.33. Ampliación del área roja de la *Figura 32*.

2.7.1.3 Aplicación de Gauss

La aplicación de Gauss es una aplicación no lineal y unidimensional que se basa en la función exponencial Gaussiana e^{-x^2} y se define como:

$$x_{k+1} = e^{-bx_k^2} + c \quad [2.56]$$

La variable x depende de forma exponencial de sí misma y de los parámetros de control b y c . El parámetro b ajusta la amplitud de la función y el parámetro c ajusta la altura.

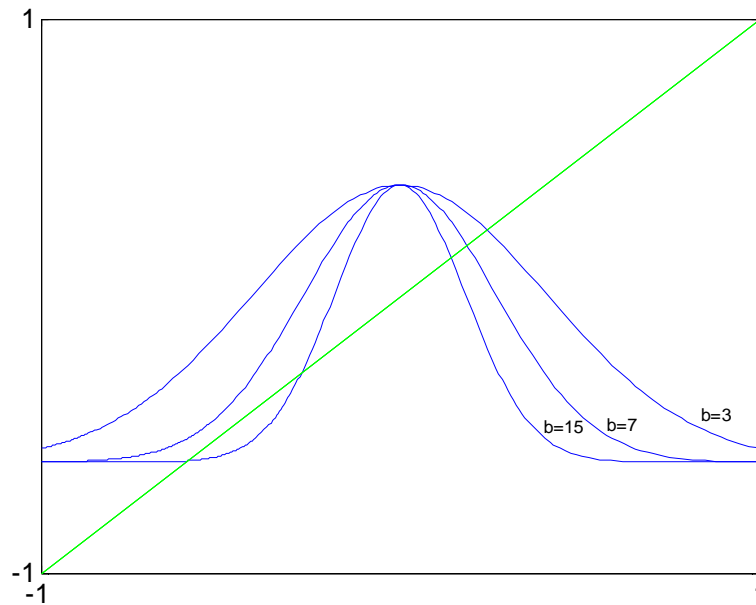


Figura 2.34. Aplicación de Gauss para $c=-0.6$ y diferentes valores de b . A medida que b toma valores cercanos a 1, la curva de la aplicación es más amplia.

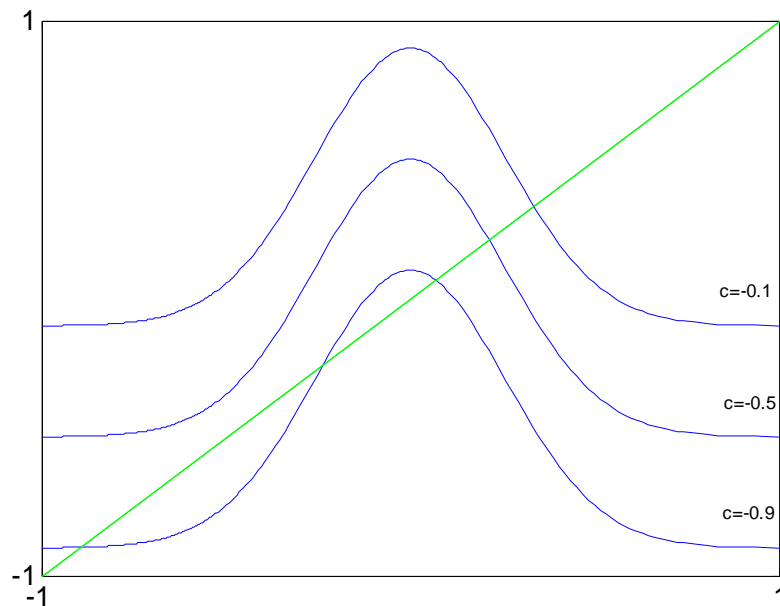


Figura 2.35. Aplicación de Gauss para $b=7.5$ y diferentes valores de c . A medida que c toma valores cercanos a 1, la curva es más alta.

Las figuras 2.34 y 2.35 de la aplicación de Gauss muestran una curva simétrica en $x = 0$, valor con el cual alcanza un máximo igual a $c + 1$. Para valores grandes de $|x|$ la aplicación toma valores mínimos iguales a c . Además presenta dos puntos de inflexión en $x = \pm 1/\sqrt{2b}$. (Hillborn, R., 1994, p. 234).

Los puntos fijos se encuentran resolviendo la ecuación $x = e^{-bx^2} + c$; sin embargo, la aplicación de Gauss es una ecuación trascendental y no tiene solución analítica (Patidar, V., 2006). Usando métodos numéricos o gráficos es posible hallar los puntos fijos. Gráficamente serán los puntos de intersección de la aplicación con la línea diagonal $x_{k+1} = x_k$. En la *figura 2.35* se puede observar que la aplicación tiene tres puntos fijos para valores grandes negativos de c ($c=-0.9$) y un punto fijo para valores pequeños negativos de c ($c=-0.1$). La variación de la altura de la aplicación a través del parámetro c hará que existan 1 o 3 puntos fijos.

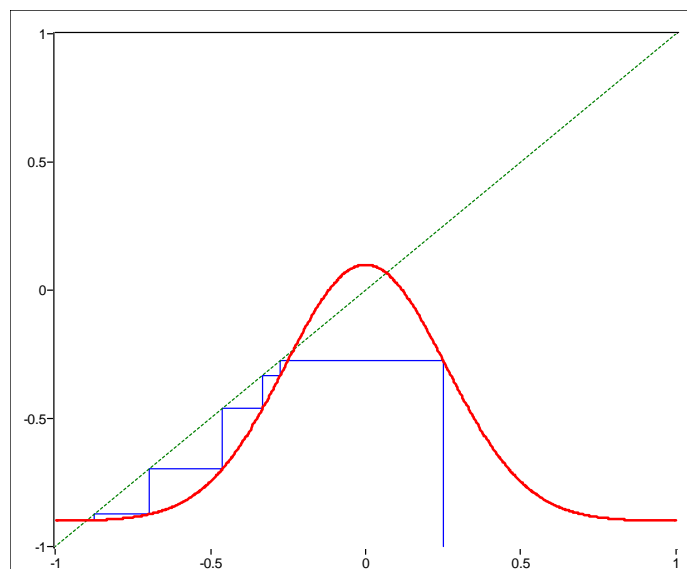


Figura 2.36. Aplicación de Gauss para $b=7.5$ y $c=-0.9$. $x(0)=0.25$

Las figuras 2.36 y 2.37 muestran que para $b=7.5$ y $c=-0.9$ existen tres puntos de corte de la aplicación con la línea diagonal. Esto significa que existirán varios atractores para un mismo valor del parámetro c . En la *figura 2.36* se observa un punto fijo atractor para $x(0)=0.25$ y en la *figura 37* otro punto fijo atractor para $x(0)=0.1$.

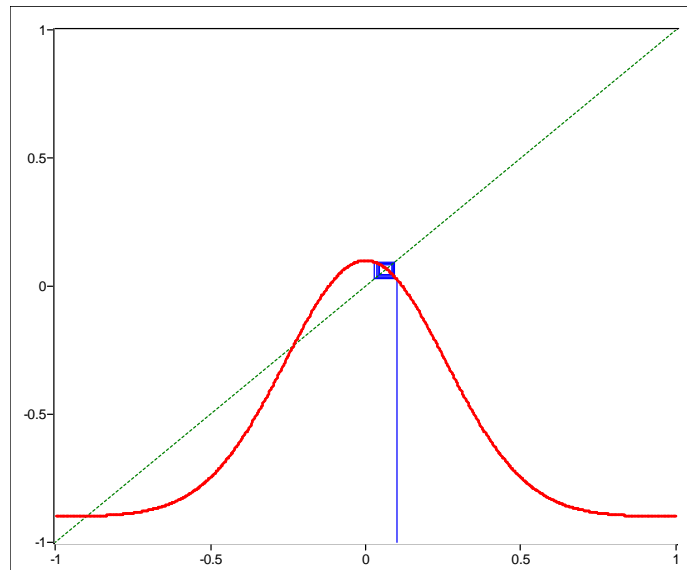


Figura 2.37. Aplicación de Gauss para $b=7.5$ y $c=-0.9$. $x(0)=0.25$

La figura 2.38 muestra para $b=7.5$ $c=-0.85$ $x(0)=-0.4$ un punto fijo atractor y la figura 39 muestra para $b=7.5$ $c=-0.85$ $x(0)=0.2$ existe un atractor de periodo dos.

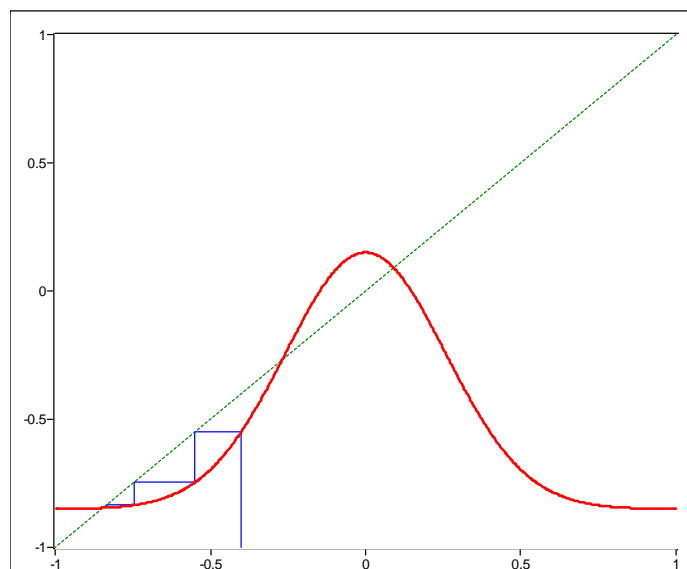


Figura 2.38. Aplicación de Gauss para $b=7.5$ y $c=-0.85$. $x(0)=-0.4$

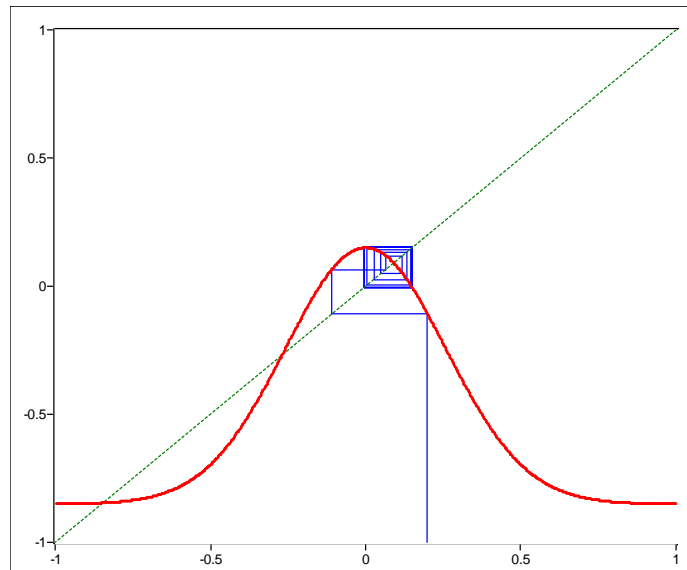


Figura 2.39 Aplicación de Gauss para $b=7.5$ $c=-0.85$ $x(0)=0.2$.

La figura 2.40 muestra para $b=7.5$ $c=-0.8$ $x(0)=-0.4$ un punto fijo atractor y la figura 41 muestra para los mismos valores y $x(0)=0.2$ existe un atractor de periodo cuatro.

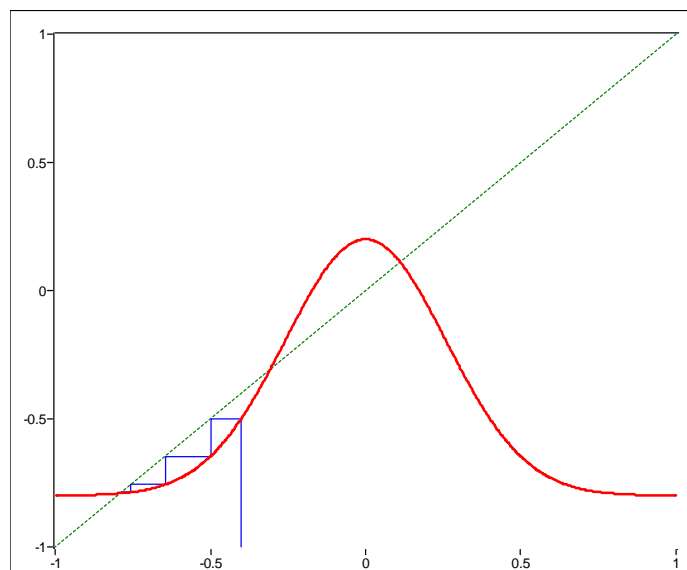


Figura 2.40. Aplicación de Gauss para $b=7.5$ $c=-0.8$ $x(0)=-0.4$

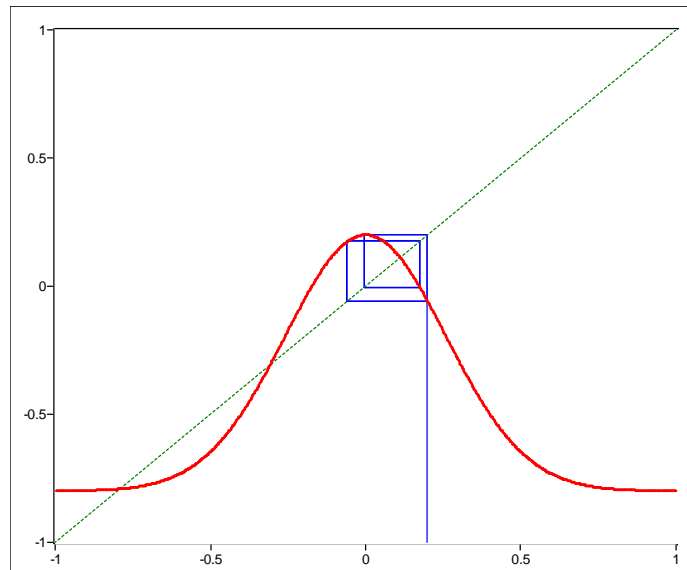


Figura 2.41. Aplicación de Gauss para $b=7.5$ $c=-0.8$ $x(0)=0.2$

La figura 2.42 muestra para $b=7.5$ $c=-0.7$ $x(0)=-0.5$ un punto fijo atractor y la figura 43 muestra para los mismos valores y $x(0)=0.4$ existe un atractor caótico.

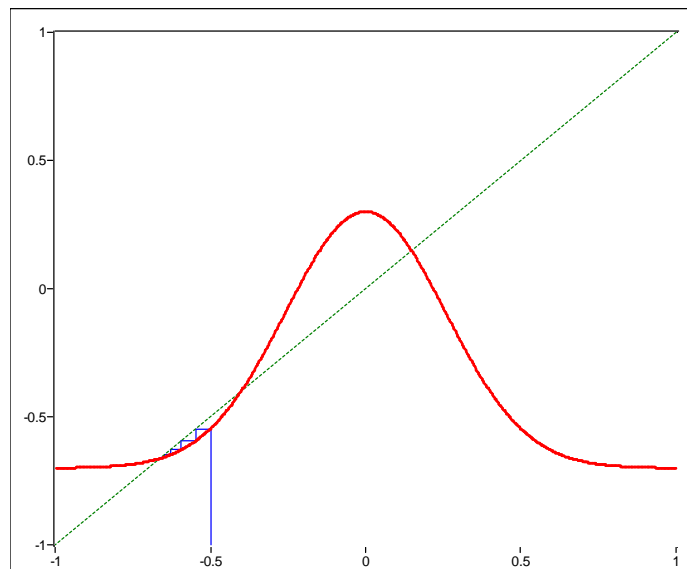


Figura 2.42. Aplicación de Gauss para $b=7.5$ $c=-0.7$ $x(0)=-0.5$

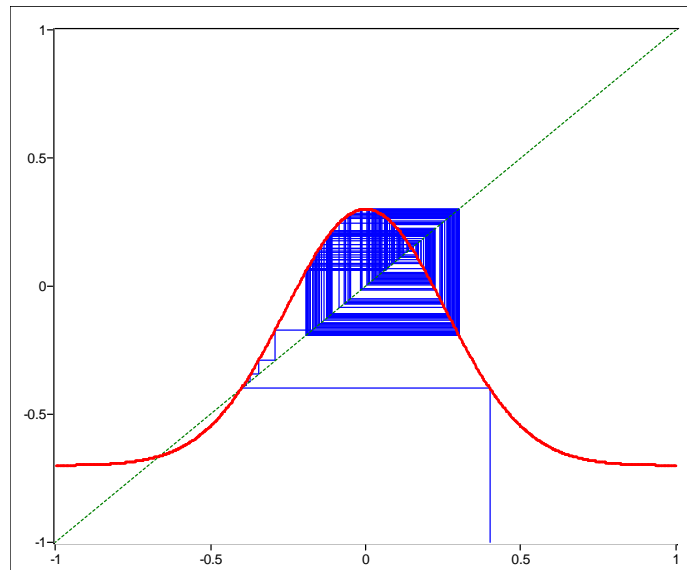


Figura 2.43. Aplicación de Gauss para $b=7.5$ $c=-0.7$ $x(0)=0.4$

La figura 2.44 muestra para $b=7.5$ $c=-0.67$ $x(0)=-0.45$ un punto fijo atractor y la figura 45 muestra para los mismos valores y $x(0)=0.4$ existe un atractor de periodo tres.

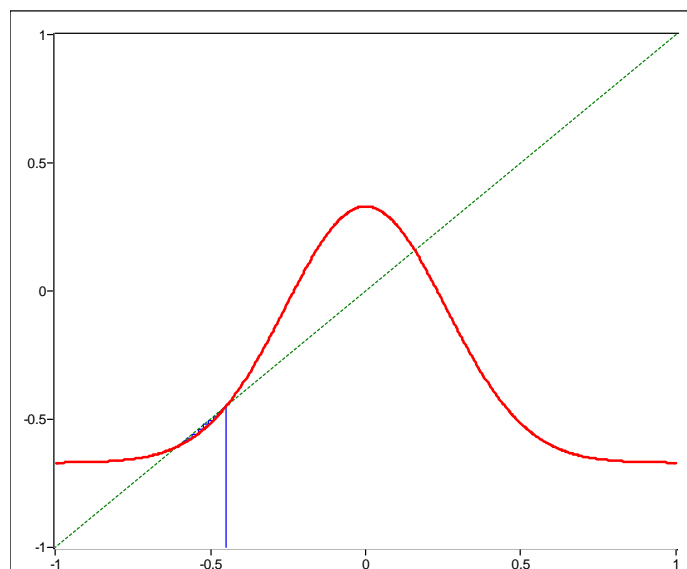


Figura 2.44. Aplicación de Gauss para $b=7.5$ $c=-0.67$ $x(0)=-0.45$

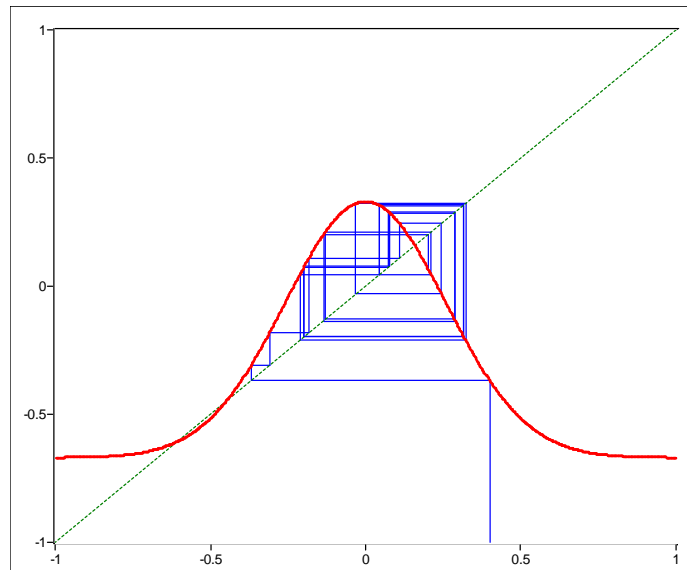


Figura 2.45. Aplicación de Gauss para $b=7.5$ $c=-0.67$ $x(0)=0.4$

En la figura 2.46 muestra para $b=7.5$ $c=-0.6$ que existen un punto fijo que es un repulsor y atractor caótico para todas las condiciones iniciales.

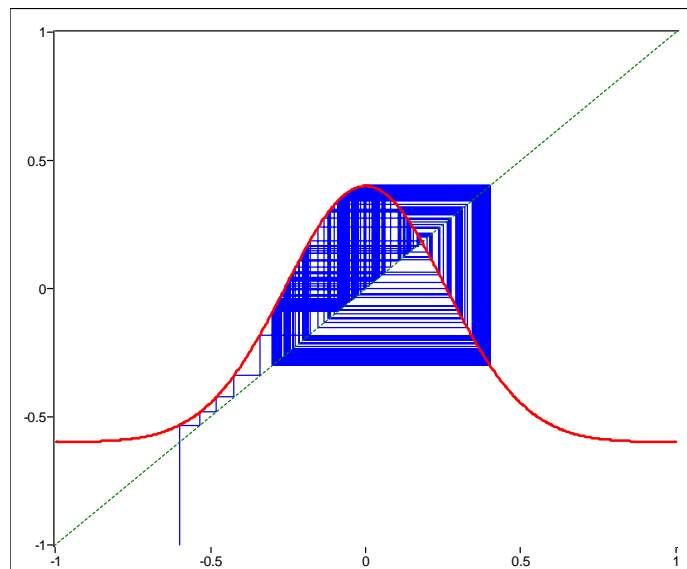


Figura 2.46. Aplicación de Gauss para $b=7.5$ $c=-0.6$.

El diagrama de bifurcación resume la dinámica comparativa de la aplicación como función del parámetro c y un valor fijo de $b = 7.5$. Se puede observar (Figura 2.47) que la aplicación de Gauss sigue la ruta de doblamiento de periodo que finaliza en comportamiento caótico, con presencia de ventanas

periódicas; sin embargo, el comportamiento dinámico no finaliza en un comportamiento caótico pues para valores grandes de c la aplicación pasa nuevamente por un proceso de doblamiento de periodo (o desdoblamiento de periodo) y finaliza en un periodo uno.

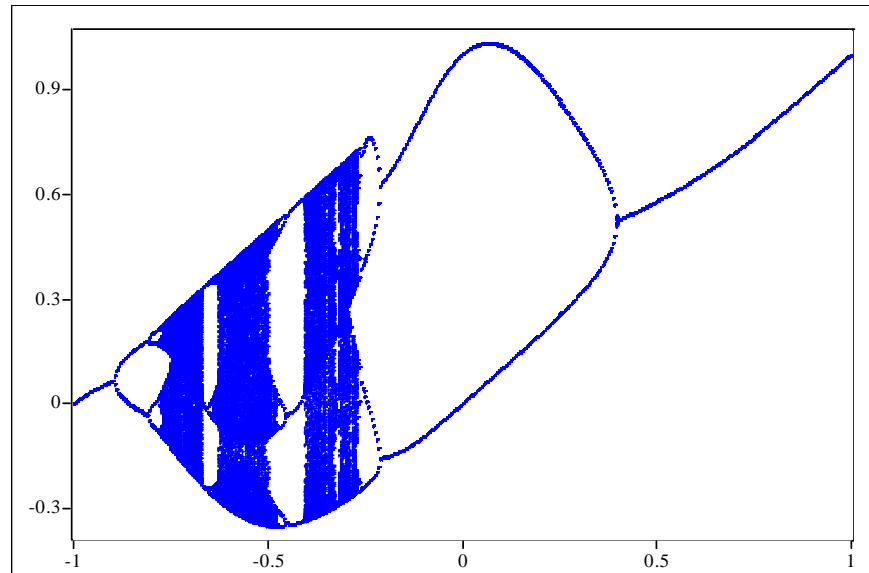


Figura 2.47. Diagrama de bifurcación $b = 7.5$.

El proceso de doblamiento y desdoblamiento de periodo ocurre porque los puntos fijos se ubican en los valores extremos de c donde la pendiente es muy pequeña, con lo cual el punto fijo de periodo uno es estable. La existencia de los puntos de inflexión permite que un comportamiento periódico de periodo-1 tenga lugar para dos rangos de valores del parámetro c . (Hillborn, R., 1994, p. 236).

Cuando el parámetro b reduce su valor, esto es, cuando la aplicación es más amplia, la magnitud de la pendiente también es pequeña y la secuencia de doblamiento de periodo se detiene en un periodo-4 (periodo-1 \rightarrow periodo-2 \rightarrow periodo-4) para hacer luego el camino inverso o desdoblamiento de periodo (period-4 \rightarrow periodo-2 \rightarrow periodo -1). (Figura 2.48).

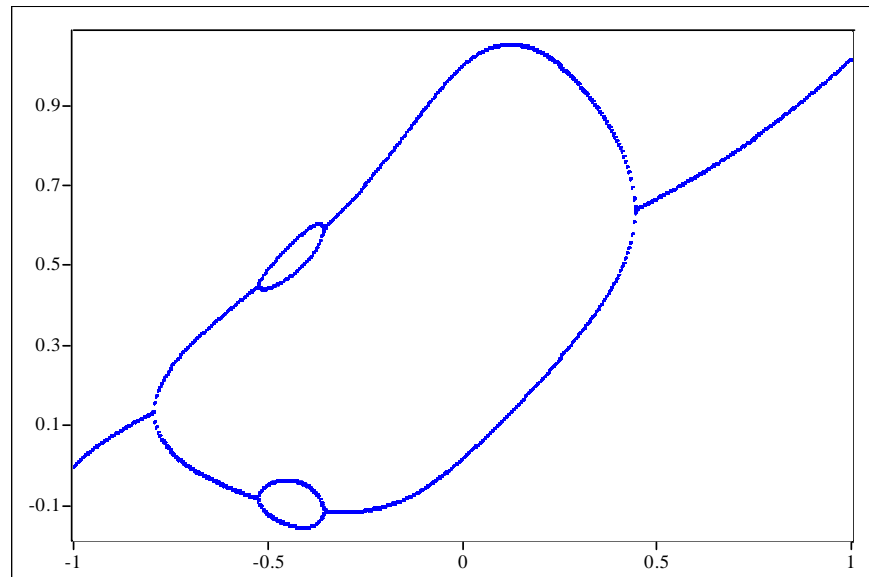


Figura 2.48. Diagrama de bifurcación $b = 4$.

La magnitud de la pendiente determina si la aplicación de Gauss se comporta de forma periódica o caótica. La magnitud de la pendiente de la función decrece para valores grandes de x . Cuando el valor de la pendiente es pequeño el comportamiento será periódico y estable, e irá transitando a un comportamiento caótico vía bifurcación de periodo a medida que la pendiente aumenta en magnitud. (También a medida que la aplicación se eleva debido al parámetro c).

2.7.2 Sistemas dinámicos continuos

En los sistemas dinámicos continuos el movimiento caótico se genera en sistemas que tienen al menos tres variables de estado.

2.7.2.1 Sistema de Lorenz

Es un sistema dinámico continuo propuesto por Edward N. Lorenz (1963) para estudiar el proceso de convección de calor en la atmósfera y es la primera descripción en tiempo continuo de movimiento caótico. Rössler (1976)

Lorenz empezó a trabajar con doce ecuaciones que representaban el movimiento de un flujo y que expresaban la relación entre temperatura y presión, y entre presión y velocidad del viento; al simplificar las ecuaciones obtuvo un sistema no lineal de solo tres variables de estado, x_1, x_2, x_3 .

El cambio de las variables de estado del sistema está dado por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\sigma x_1 + \sigma x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_3 + r x_1 - x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - b x_3\end{aligned}\tag{2.57}$$

El sistema de Consta de tres ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas que contienen dos términos no lineales, donde x_1 es proporcional a la intensidad del movimiento de convección, x_2 es proporcional a la variación horizontal de la temperatura y x_3 es proporcional a la variación vertical de la temperatura; $\{\sigma, b, r\}$ son los parámetros del sistema con significados específicos: σ es el número de Prandtl que expresa la relación entre la viscosidad cinemática y la conductividad térmica, b es una constante positiva de origen geométrico que relaciona la altura de la capa de fluido con el tamaño horizontal de los vórtices de convección, y r es la relación entre el número de Rayleigh (R) y el número crítico de Rayleigh (R_c), que es el valor de R para el cual comienza el proceso de convección. El parámetro $r = R/R_c$ sirve como parámetro de control del sistema. (Izasa, J., & Campos, D., 2002, p. 46).

En 1961, Lorenz repitió una secuencia de datos en su ordenador pero introdujo sólo tres cifras decimales de las seis con que había corrido inicialmente el modelo. El número inicial de la secuencia era 0.506127 e introdujo el número 0.506. Si el modelo sólo contuviera términos lineales, la nueva secuencia debería haber arrojado un resultado con muy poca divergencia del original pues la diferencia en los datos iniciales era mínima, sin embargo, la secuencia que había desarrollado era completamente diferente. La evolución de su sistema en el espacio de fases se parecía a las alas de una mariposa (*Figura 2.49*).

Con el hallazgo de Lorenz se comprendió que un sistema con pocos grados de libertad podía desarrollar un comportamiento caótico de cambios no periódicos y de divergencia exponencial causado por el efecto de las pequeñas diferencias en las condiciones iniciales (seis cifras decimales redondeadas a tres). El atractor que observó, llamado hoy atractor de Lorenz, se obtuvo para valores de los parámetros $\sigma = 10$, $r = 28$ y $b=8/3$.

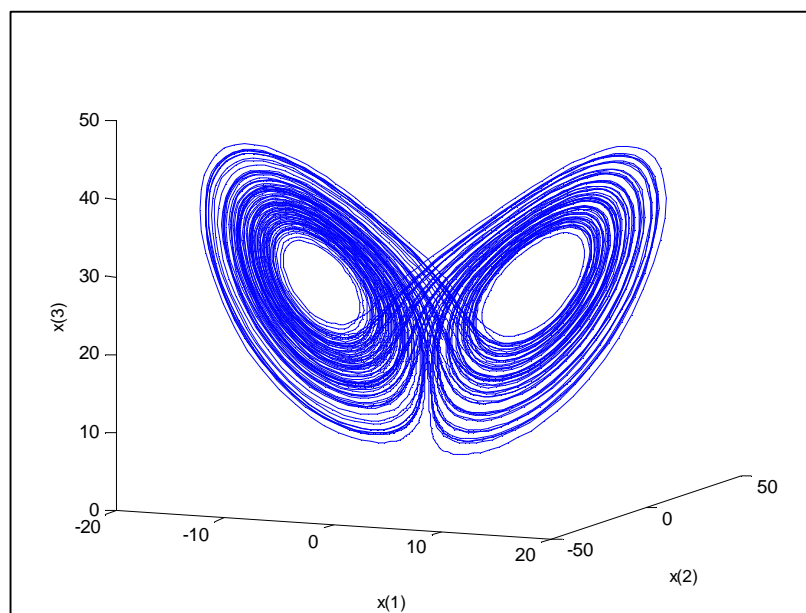


Figura 2.49. Atractor de Lorenz en el espacio de fases.

El sistema de Lorenz es importante en el estudio de los sistemas dinámicos porque su solución mostró propiedades inesperadas. El flujo de las trayectorias en el espacio de fases muestra dos espirales inestables conectadas de forma tal que el exterior de las espirales está unido con el interior de la otra espiral, por lo que las partes más exteriores de una espiral se conectan con las partes más internas de la otra espiral y viceversa. La parte externa regresa después de girar. Esta solución, desconocida hasta ese momento, fue la primera visualización de un atractor extraño y se obtuvo gracias al uso de los ordenadores. La forma del atractor de Lorenz da el nombre de “efecto mariposa” a la propiedad de sensibilidad a las condiciones iniciales que muestran las soluciones caóticas.

2.7.2.2 Sistema de Rössler

Rössler (1976) desarrolló un sistema prototipo del modelo de turbulencia de Lorenz que genera una forma similar al producido por el sistema de Lorenz, pero que produce una única espiral. El sistema de Rössler no tiene un significado físico inmediato puesto que la intención fue mostrar las propiedades básicas del caos a través de un sistema dinámico continuo sencillo.

El modelo de Rössler describe un sistema de tres parámetros $\{a, b, c\}$ y tres variables de estado (x, y, z) que se transforma según las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + xz - cz\end{aligned}\tag{2.58}$$

El único término no lineal es xz .

Los diferentes tipos de comportamiento del sistema se obtendrán para valores de $a = b = 0.2$ y diferentes valores de c .

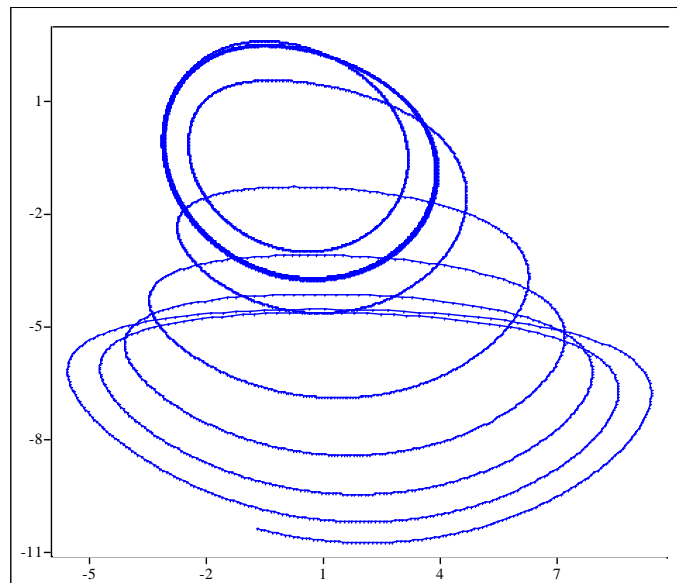


Figura 2.50. $c = 2$

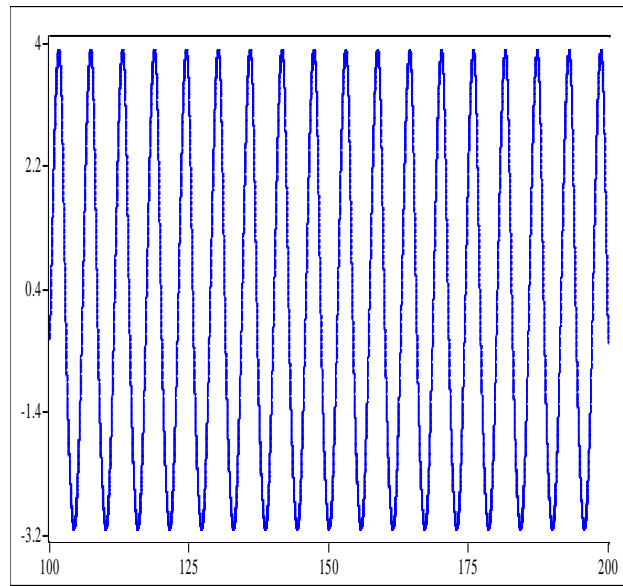


Figura 2.51. Trayectoria temporal periódica $c = 2$.

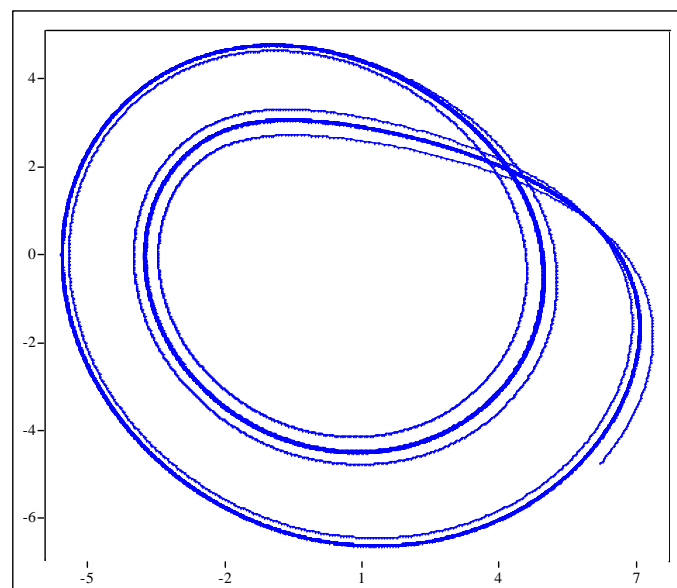


Figura 2.52. $c = 3.5$

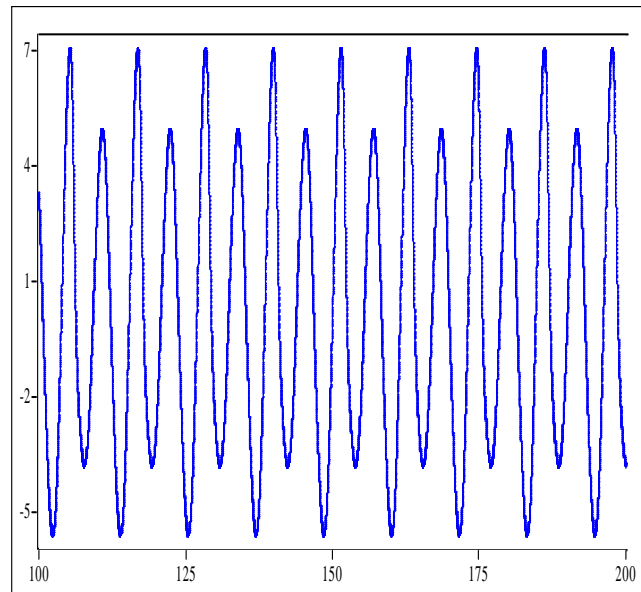


Figura 2.53. Trayectoria temporal periódica $c = 3.5$

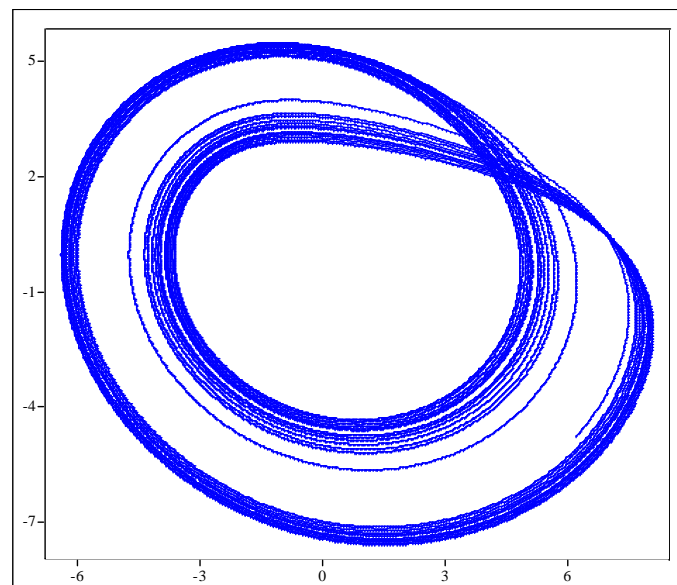


Figura 2.54. $c = 4$

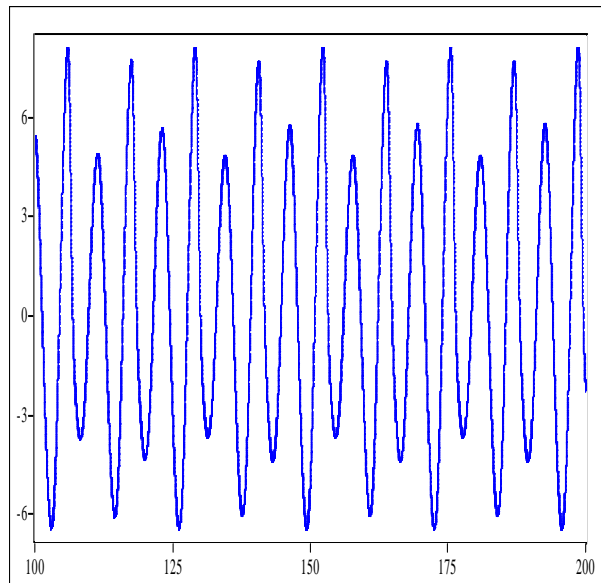


Figura 2.55. Trayectoria temporal periódica $c = 4$

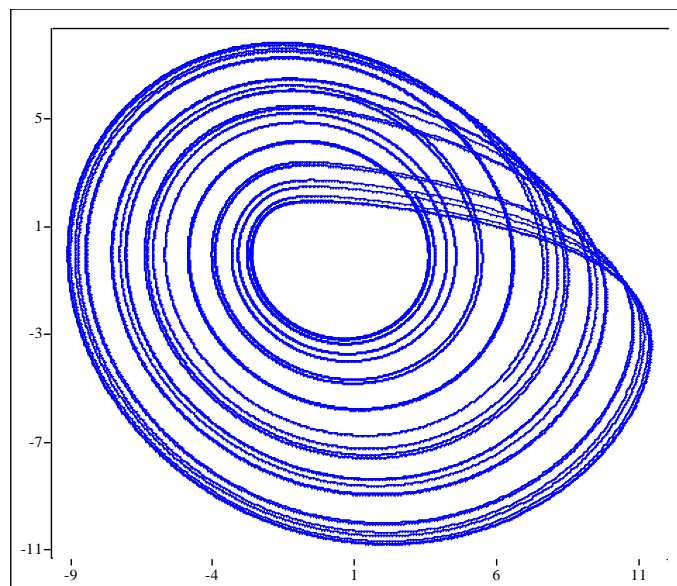


Figura 2.56. $c = 5.7$

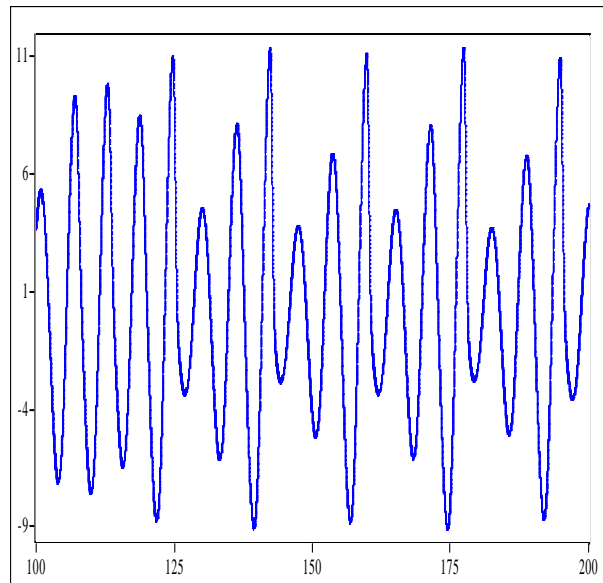


Figura 2.57. Trayectoria temporal caótica $c = 5.7$

El flujo generado corresponde a una única espiral. La parte externa regresa después de hacer un giro (como el movimiento de una cinta de möbius) hacia la parte más interna de la misma espiral; las partes más externas están conectadas con las partes más internas. Si se varía el grado de superposición, se hace notorio que el comportamiento no periódico se obtiene si y solo si al menos dos incrementos sucesivos de amplitud son posibles para la trayectoria más externa después de que se ha convertido en la trayectoria más interna Rössler (1976).

El sistema de Rössler se estabiliza en un atractor extraño (Figuras 2.56 y 2.57); su corte transversal (mapa de Poincaré) es un conjunto de Cantor de dos dimensiones; el flujo es no periódico y estructuralmente estable, aunque todas las trayectorias sean inestables. Todos los resultados que se obtienen para el sistema de Lorenz también son ciertos para el sistema de Rössler.

CAPÍTULO 3

FUNDAMENTOS DEL CONTROL DE SISTEMAS DINÁMICOS

3.1. Componentes de un sistema dinámico para la teoría del control

En general, se entiende por control de un sistema dinámico la manipulación de las variables de entrada de un sistema dinámico con el objetivo de modificar el comportamiento del sistema y obtener una respuesta deseada del mismo.

El control de sistemas dinámicos se ha hecho desde dos grandes enfoques: la **teoría del control clásica** y la **teoría del control moderna**. La primera se conoce como enfoque convencional de control y utiliza para el análisis de estabilidad métodos como el del lugar geométrico de las raíces y de la respuesta de frecuencia (Dorf, 1989); generalmente aplicado a sistemas de una entrada-una salida y a sistemas lineales e invariantes en el tiempo y que pueden ser modelados a través funciones de transferencia; además, emplea como instrumentos para el análisis y el diseño de sistemas de control las transformadas Z para sistemas discretos y de Laplace para sistemas continuos.

La teoría de control moderna, por su parte, se basa en el concepto de estado (Ogata, 1998) y emplea la **descripción en el espacio de estados** como herramienta que facilita el análisis de sistemas con múltiples entradas y

múltiples salidas al transformar ecuaciones diferenciales o en diferencias de un orden elevado en ecuaciones de primer orden. (Caballero et al, 1998). En esta tesis utilizaremos este enfoque moderno de la teoría del control.

Para introducir las técnicas de control moderno, recordemos brevemente el concepto de sistema dinámico. En el capítulo 2 hemos definido un sistema dinámico como aquellos que describen el cambio en el espacio de estados de un sistema que varía en el tiempo. Podemos añadir ahora dos elementos adicionales en estos sistemas, en primer lugar, las variables de control que en el capítulo dos fueron tratadas como parámetros y que ahora trataremos simplemente como variables que también pueden variar en el tiempo pero de forma exógena a la propia dinámica del sistema, y, en segundo lugar las variables de medición u observables.

De esta forma diremos que un sistema dinámico puede representarse en tiempo continuo como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\mu}(t), t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\mu}(t), t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

En donde $\mathbf{x} \in \mathbf{D} \subset \mathbb{R}^n$ es el vector de estados de las variables endógenas o dependientes que indica la evolución seguida por el sistema; $t \in \mathbb{R}$ es la variable independiente tiempo; $\dot{\mathbf{x}}(t) = d\mathbf{x}(t)/dt$ representa la derivada o el cambio respecto al tiempo de las n variables de estado \mathbf{x} ; $\boldsymbol{\mu}(t) \in V \subset \mathbb{R}^p$ es el vector de variables exógenas del sistema, algunas de las cuales actuarán como variables de control; $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ es el vector de variables de medición o salidas del sistema que recoge la información que está disponible para control y es una función de las variables de estado del sistema.

Las variables de salida permitirán que la variable de control pueda influir sobre la variable de estado cuando no se disponga de datos o de información sobre ésta última variable. Las variables de salida son, por tanto, aquellas que están disponibles para ser medidas. Si las variables de salida no están dadas explícitamente, se asume que todo el vector de estados es observable:

$$\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{x}(t).$$

De manera análoga, un sistema dinámico que varía en tiempo discreto puede representarse como un sistema de ecuaciones en diferencias de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{F}(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\mu}(k), k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{G}(\mathbf{x}(k), \boldsymbol{\mu}(k), k) \end{aligned} \quad [3.2]$$

con \mathbf{F} y \mathbf{G} funciones vectoriales; $k \in \mathbb{N}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) representa periodos de tiempo de amplitud constante, $\mathbf{x}(k) \in \mathbf{D} \subset \mathbb{R}^n$ es el vector columna de las n variables de estado $x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)$ del sistema; $\boldsymbol{\mu}(k) \in V \subset \mathbb{R}^p$ es el vector de variables de control; y $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^q$ representa el vector de salidas del sistema, que es una función de las variables de estado del sistema.

Las funciones \mathbf{f}/\mathbf{F} en [3.1] y [3.2] se llaman **ecuaciones de estado** y representan la tasa de cambio del vector de estados como una función del estado \mathbf{x} , del control $\boldsymbol{\mu}$ y del tiempo t/k . Las funciones \mathbf{g}/\mathbf{G} se llaman **ecuaciones de salida** y representa las variables de medición como función del estado \mathbf{x} , del control $\boldsymbol{\mu}$ y del tiempo t/k . En nuestro caso, centraremos la atención en la evolución de la ecuación de estado y prescindiremos de la ecuación de salida.

Las variables de estado $\mathbf{x}(t/k) = \{x_1(t/k), x_2(t/k), x_3(t/k), \dots, x_n(t/k)\}$ de un sistema dinámico no pueden ser modificadas directamente puesto que están determinadas endógenamente por la evolución temporal seguida por el sistema dinámico; sin embargo, esta evolución temporal sí podrá ser modificada usando variables de control $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_\pi\}$; para que el sistema siga una evolución deseada o buscada (\mathbf{x}_*). La figura 3.1 representa el esquema general de control de un sistema dinámico.

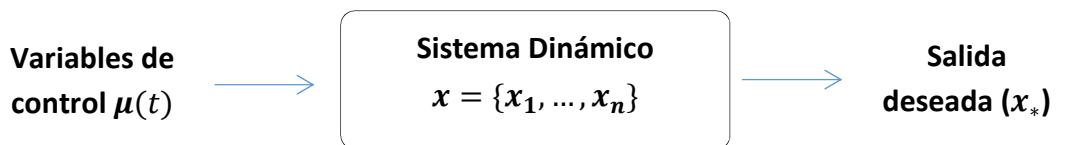


Figura 3.1. Esquema general de control de un sistema dinámico.

La descripción en el espacio de estados se aplica a sistemas lineales y no lineales. Los sistemas [3.1] y [3.2] serán lineales en el espacio de estados si las funciones f/F son lineales en x y en μ . De acuerdo con Aström, K., & Murray, R. (2008), los sistemas:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\mu(t) \quad [3.3]$$

$$x(k+1) = Ax(k) + B\mu(k) \quad [3.4]$$

en donde $A(t/k)$ es la matriz de estado y $B(t/k)$ es la matriz de control, son la representación en el espacio de estados de los sistemas [3.1] y [3.2]

Así mismo, un sistema no lineal con una entrada de control μ :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \mu(t))$$

Tal que $f(0, 0) = 0$, es un equilibrio del sistema, se puede escribir:

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0, \mu=0} x + \left(\frac{\partial f}{\partial \mu}\right)_{x=0, \mu=0} \mu + f_{h.o.t.}(x, \mu) \quad [3.5]$$

donde $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0, \mu=0}$ representa la derivada del sistema respecto a la variable de estado evaluada en el punto de equilibrio del sistema; $\left(\frac{\partial f}{\partial \mu}\right)_{x=0, \mu=0}$ es la derivada respecto al parámetro de control evaluada en el punto de equilibrio del sistema y $f_{h.o.t.}$ expresa los términos de mayor orden en x y en μ . El sistema resultante a partir de [3.5]:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\mu(t)$$

será la *linealización* o *aproximación lineal* del sistema no lineal original en el punto $(x = 0, \mu = 0)$, con A matriz Jacobiana de f con respecto a x en $(x = 0, \mu = 0)$ y B , matriz de f con respecto a μ en el mismo punto³⁸.

El control del caos empleará la descripción en el espacio de estados para la formulación de sistemas caóticos y la aplicación de técnicas de control.

³⁸ La linealización permite que algunos sistemas no lineales sean considerados como lineales en un entorno alrededor de un punto.

3.2 Objetivos de control.

El objetivo principal del control de sistemas dinámicos es hacer que el sistema se comporte de una forma deseada manipulando las variables de control. Este objetivo general de control se puede dividir en dos objetivos específicos: el objetivo de **tracking** (o seguimiento) con el cual se busca que el sistema dinámico siga una trayectoria especificada, y el objetivo de **estabilización** (o regulación) con el cual se busca que el sistema se estabilice en un punto de equilibrio.

El objetivo de tracking se escribirá formalmente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - x_*(t)] = 0 \quad [3.6]$$

y el objetivo de estabilización:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_* \quad [3.7]$$

En el objetivo de control de tracking o seguimiento se busca conducir las soluciones $x(t)$ hacia una trayectoria deseada $x_*(t)$ y en el objetivo de estabilización, que es considerado como un caso especial del objetivo de tracking, se busca que el estado de un sistema dinámico sea estabilizado alrededor de un punto de equilibrio, es decir, se busca conducir una solución $x(t)$ del sistema a un equilibrio x_* .

Estos dos objetivos son los objetivos tradicionales de la teoría del control; sin embargo, actualmente el control de sistemas dinámicos también busca la *sincronización* de sistemas y la *modificación del comportamiento asintótico*, es decir, cambiar el tipo de equilibrio (estable/inestable), cambiar el tipo de conjunto límite, cambiar el punto y/o el tipo de bifurcación o, crear oscilaciones con propiedades deseadas. (Fradkov, A., & Pogromsky, A., 1998, p. 10),

Por su parte, el control de sistemas caóticos busca la estabilización de trayectorias caóticas, la generación de comportamiento caótico o la sincronización controlada de trayectorias caóticas. El objetivo de esta tesis es la estabilización de trayectorias caóticas a través de la técnica de control conocida como método OGY (Ott, Gerbogi and Yorke, 1990), método que será presentado más adelante en este mismo capítulo. Previamente es necesario repasar algunos conceptos relacionados con las formas de control.

3.3 Formas de control

Controlar un sistema dinámico implica resolver un **problema de control**, es decir, buscar una **ley de control**, una regla o algoritmo que al ser aplicado al sistema dinámico determine un comportamiento deseado. El control de un sistema dinámico se hará aplicando un esquema de *feedback* o de *feedforward* para que el sistema bajo estudio siga una dinámica deseada.

3.3.1 Feedback o sistema de control en lazo cerrado

El control realimentado actúa reduciendo la diferencia entre la salida (y) del proceso a controlar y un valor (Y^*) predeterminado para ofrecer una acción correctiva. Los métodos de control en lazo cerrado serán, por tanto, métodos en los cuales la salida del sistema influye en el control. La ley de control (u) se calculará conociendo la dinámica del sistema y midiendo la diferencia o error ($e = y - Y^*$) entre la variable controlada y su valor predeterminado. Es precisamente este procedimiento de restar el valor de salida del valor de entrada el que da el nombre de realimentación negativa a esta forma de control³⁹.

³⁹ La ingeniería de control implementa la estrategia de control realimentado o feedback a través de leyes de control de tres tipos: control on-off; control proporcional; control proporcional-integral-derivativo (PID). (Aström y Murray; 2008:23).

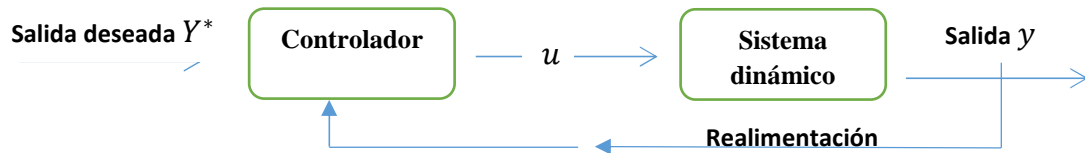


Figura 3.2. Diagrama de bloques de un esquema de control en lazo cerrado o feedback.

3.3.2 Feedforward o sistema de control en lazo abierto

Los métodos de control en lazo abierto son no realimentados, esto es, la salida del sistema (y) no influye en el control (u). Se compone básicamente de dos partes, el **controlador** y el **sistema**. El controlador recibe una señal de referencia (Y^*) externa predeterminada para cambiar el comportamiento del sistema dinámico y emite una señal de control (u) que controla el sistema dinámico de forma tal que la salida (y) se desempeña de acuerdo con los valores deseados.

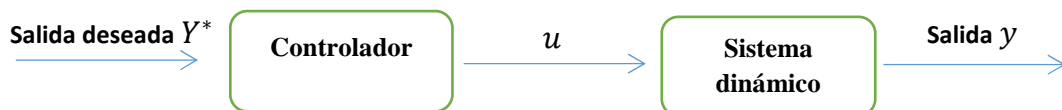


Figura 3.3. Esquema de sistema de control en lazo abierto.

3.4 Estabilización por realimentación de estado

La estabilización de un sistema dinámico se podrá realizar a través de la **realimentación del vector de estados del sistema empleando un esquema en lazo cerrado**. La técnica de **asignación de polos** permitirá que los valores propios de la matriz de estado A (llamados polos reguladores) de un sistema dinámico sean asignados en posiciones arbitrarias deseadas. La realimentación de estados se aplica a sistemas en tiempo continuo y en tiempo discreto; nos centraremos en los sistemas que varían en tiempo discreto.

3.4.1 Asignación de polos

Dado el sistema en lazo abierto:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad [3.8]$$

Donde $\mathbf{x}(k)$ es el vector de estado de dimensión n , $\mathbf{u}(k)$ es la variable de control y \mathbf{A} y \mathbf{B} son matrices de coeficientes constantes $n \times n$ y $n \times 1$ respectivamente.

Escogiendo una ley de control con la forma:

$$u(k) = -\mathbf{K}^T \mathbf{x}(k) \quad [3.9]$$

donde \mathbf{K}^T es una matriz de ganancias de dimensión $1 \times n$, el sistema en lazo abierto [3.8] será realimentado empleando el vector de estados y se transformará en un sistema en lazo cerrado.

La ley de control [3.9] se puede expresar como:

$$u(t) = -K_1 x_1(t) - K_2 x_2(t) - \dots - K_n x_n(t) \quad [3.10]$$

La señal de realimentación en feedback es la correspondiente suma ponderada de todos los estados del sistema. Sustituyendo [3.9] en [3.8] se obtiene la ecuación de estado del sistema en lazo cerrado:

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}^T)\mathbf{x}(k) \quad [3.11]$$

Siendo $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}^T)$ la matriz del sistema en lazo cerrado. El problema de diseño de la ley de control consistirá en especificar la ubicación deseada de los valores propios de la ecuación característica del sistema en lazo cerrado (matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}^T)$) y el cálculo de la matriz de ganancias \mathbf{K}_i^T que lleve a la ubicación deseada de los valores propios de $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}^T)$.

La matriz del sistema en lazo cerrado ($A - BK^T$) será estrictamente estable si todos sus valores propios están dentro del círculo unidad, es decir, los valores propios son en módulo menores que la unidad. El sistema es inestable si al menos un valor propio de la matriz en lazo cerrado está fuera del círculo unidad (al menos un valor propio es en módulo mayor que la unidad).

Ubicando en el plano-s los valores propios de ($A - BK^T$) se podrá expresar gráficamente la condición de estabilidad del sistema:

$$|sI - (A + BK^T)| = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0$$

Donde $s_1 \dots s_n$ son los valores propios de la ecuación característica del sistema realimentado.

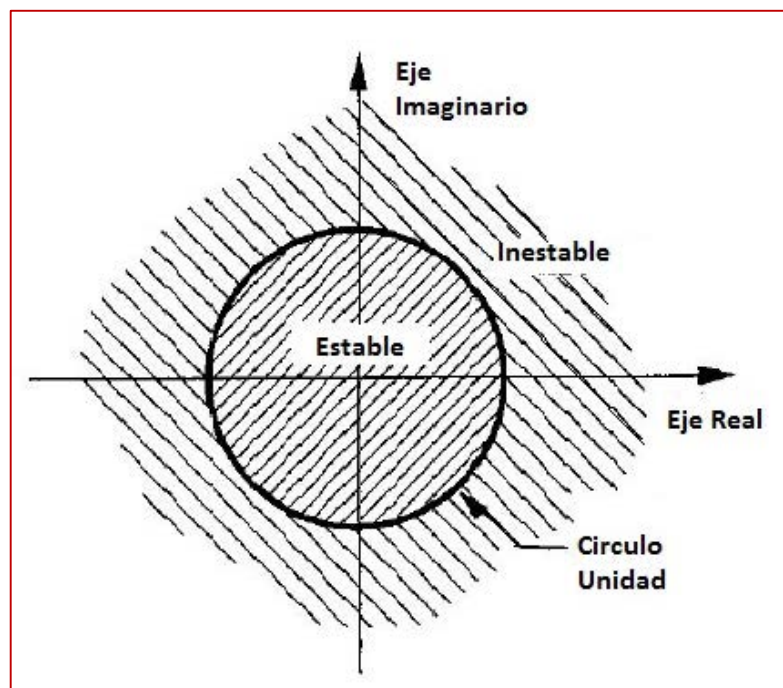


Figura 3.5. Condición de estabilidad en el plano s para un sistema en tiempo discreto.

Eligiendo una matriz de ganancias K^T de forma adecuada, la matriz del sistema en lazo cerrado será asintóticamente estable.

3.4.2 Controlabilidad de un sistema dinámico

Empleando la asignación de polos, éstos se podrán ubicar arbitrariamente si y solo si el sistema es de estado completamente controlable. El concepto de controlabilidad hace referencia a las condiciones bajo las cuales el estado de un sistema dinámico se puede llevar a una situación deseada empleando las variables de control. La controlabilidad empleará únicamente la ecuación de estado.

Considerando el sistema en el espacio de estados que varía en tiempo discreto:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad [3.12]$$

Donde \mathbf{x} es un vector de estados de dimensión n , $\mathbf{u}(k)$ es la señal de control, \mathbf{A} es una matriz $n \times n$ y \mathbf{B} es una matriz de $n \times 1$. Buscamos encontrar una señal de control tal que cualquier punto en el espacio de estados pueda ser controlado usando alguna entrada de control.

De acuerdo con Dorsey, J (2005, p. 561) el sistema [3.12] será controlable si existe una secuencia de control $\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(N-1)$, con $N < \infty$, que lleva al sistema desde un estado inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ a cualquier estado $\mathbf{x}(N) \neq \mathbf{0}$.

3.4.2.1 Condición de controlabilidad

La condición necesaria y suficiente para que el sistema [3.12] sea controlable es que la *matriz de controlabilidad* \mathbf{C} de dimensión $n \times n$ definida como:

$$\mathbf{C} = (\mathbf{B} : \mathbf{AB} : \mathbf{A}^2\mathbf{B} : \dots : \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}) \quad [3.13]$$

tenga rango n : $r(\mathbf{C}) = n$ ⁴⁰.

⁴⁰ El determinante de la matriz debe ser diferente de cero y la matriz se llamará *no singular*. Una matriz *singular* tiene un rango menor que n o su determinante es cero; tendrá n vectores columna linealmente dependientes, siendo n el número de variables de estado $\mathbf{x}(t)$

Esto significa que para controlar un punto arbitrario en el espacio de estados se requiere que existan n columnas linealmente independientes de la matriz **C**. Si se cumple esta condición, la evolución seguida por el sistema, dada por las variables de estado x , podrá ser cambiada utilizando las variables de control u . El sistema no será controlable si $r(C) < n$.⁴¹

La forma canónica controlable de las matrices **A** y **B** facilitará el análisis de controlabilidad del sistema. Las matrices **A** y **B** tendrán la siguiente forma canónica, bajo la hipótesis de que el sistema es controlable y existe una única variable de control:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con a_i coeficientes del polinomio característico de **A**:

$$|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i)$$

Si un sistema es de estado controlable, entonces será posible ubicar de forma arbitraria los polos de lazo cerrado del sistema a través de la realimentación lineal del vector de estados.

3.4.3 Diseño para la ubicación de polos

El problema del emplazamiento de polos consistirá en determinar el valor del vector K^T de forma tal que los polos reguladores o valores propios de la matriz del sistema en lazo cerrado ($A - BK^T$) tengan unos valores especificados previamente.

⁴¹ Esta es la condición de controlabilidad dinámica. La condición de controlabilidad estática fue expresada por Timbergen (1952).

Suponiendo que los polos en lazo cerrado están en $s = \mu_1, s = \mu_2, \dots, s = \mu_n$.

La solución al problema del emplazamiento de polos está dada por la fórmula:

$$\mathbf{K}^T = \{\alpha_n - a_n, \dots, \alpha_1 - a_1\} \mathbf{T}^{-1} \quad [3.14]$$

Donde $\mathbf{T} = \mathbf{C}\mathbf{W}$, y

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde $\{a_1, \dots, a_n\}$ son los coeficientes del polinomio característico de \mathbf{A} :

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i)$$

y $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ son los coeficientes del polinomio característico deseado $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}^T)$:

$$|s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}^T)| = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n = \prod_{j=1}^n (s - \mu_j)$$

3.4.4. Ejemplo de determinación de la matriz de ganancias de realimentación

Siguiendo a Ogata, K., (1998, p. 795), el sistema definido en el espacio de estados por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

donde:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hallaremos la matriz de realimentación K^T siguiendo dos métodos.

Método 1

La ecuación característica del sistema es:

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 5 & s+6 \end{vmatrix} = s^3 + 6s^2 + 5s + 1$$

Los coeficientes del polinomio característico son:

$$a_1 = 6, a_2 = 5 \text{ y } a_3 = 1.$$

Se desea que los polos del sistema en lazo cerrado estén ubicados en:

$$s = -2 \pm j4 \text{ y } s = -10.$$

La ecuación característica deseada es:

$$(s + 2 - j4)(s + 2 + j4)(s + 10) = s^3 + 14s^2 + 60s + 200$$

Los coeficientes del polinomio característico deseado son:

$$\alpha_1 = 14, \alpha_2 = 60 \text{ y } \alpha_3 = 200$$

Entonces:

$$K^T = [\alpha_3 - a_3, \alpha_2 - a_2, \alpha_1 - a_1] = [200 - 1, 60 - 5, 14 - 6] = [199, 55, 8]$$

Método 2

Definiendo la matriz de ganancias de realimentación K^T como: $K^T = [k_1, k_2, k_3]$ e igualando $|sI - (A + BK^T)|$ con la ecuación característica deseada, tenemos:

$$|sI - (A + BK^T)| = \begin{vmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} [k_1, k_2, k_3] =$$

$$= \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1+k_1 & 5+k_2 & s+6+k_3 \end{bmatrix} = s^3 + (6+k_3)s^2 + (5+k_2)s + 1+k_1 =$$

$$= s^3 + 14s^2 + 60s + 200$$

Por tanto:

$$6 + k_3 = 14$$

$$5 + k_2 = 60$$

$$1 + k_1 = 200$$

Entonces $k_1 = 199$; $k_2 = 55$; $k_3 = 8$ y, $K^T = [199; 55; 8]$

3.5 Control de sistemas caóticos

El control de un sistema dinámico utiliza, en general, un esquema de realimentación (feedback) o un esquema no realimentado (feedforward), para que el sistema siga una dinámica deseada. En el caso de los sistemas dinámicos caóticos, la dinámica buscada será la correspondiente a un comportamiento periódico o regular.

La evolución de un sistema dinámico caótico puede ser cambiada modificando las condiciones iniciales del sistema o haciendo variaciones en los valores de los parámetros, en el primer caso, se modificará la **estabilidad dinámica** del sistema y en el segundo, la **estabilidad estructural**.

Por tanto, la estabilidad podrá hacer referencia, a la estabilidad de los puntos de equilibrio (estabilidad estructural) o a la estabilidad dinámica del sistema (respuesta del sistema ante cambios en las condiciones iniciales). La respuesta de un sistema dinámico caótico a variaciones en las condiciones iniciales está medida por el espectro de exponentes de Lyapunov, siendo un

sistema dinámico caótico aquel que presenta al menos un exponente positivo.

Al referirnos a la estabilidad estructural de un sistema dinámico, se entenderá que el sistema es estable si una pequeña perturbación en su estado de equilibrio hace que los siguientes movimientos debidos a la perturbación permanezcan próximos al estado de equilibrio. (Gandolfo, 2009, p. 353); un atractor representa un estado de equilibrio estable y un repulsor representa un estado de equilibrio inestable. Con el control del caos se busca modificar el tipo de equilibrio o atractor en el que se estabiliza un sistema dinámico caótico, modificando así la estabilidad estructural haciendo leves variaciones en los parámetros del sistema.⁴².

3.5.1 Objetivos de control de caos

3.5.1.1 Estabilización de trayectorias caóticas

El objetivo de control de sistemas caóticos será la estabilización de trayectorias caóticas alrededor de órbitas periódicas inestables $x_*(t)$ de periodo m ($m = 1, 2, 3 \dots$) que se encuentran alojadas dentro del atractor caótico. (Boccaletti, S., Grebogi, C., Lai, Y-C., Mancini, H., & Maza, D., 2000).

Siguiendo a Fradkov, A., & Evans, R. (2005) y Fradkov, A., Evans, R., & Andrievsky, B. (2006), dado el sistema dinámico descrito en el espacio de estados por la ecuación diferencial:

$$\dot{x}(t) = F(x(t), u(t)) \quad [3.15]$$

Donde $\dot{x}(t) = dx/dt$ representa la derivada de x respecto al tiempo, x es un vector n -dimensional de variables de estado, u es un vector m -dimensional

⁴² Esta es una diferencia fundamental entre el control de procesos caóticos y el control convencional. (Andrievsky y Fradkov; 2003).

de variables de control y F es continuamente diferenciable. El vector u representa la variación de los parámetros del sistema: $u(t) = p - p_0$, siendo p_0 el valor nominal del parámetro p .

El objetivo será la estabilización de un equilibrio inestable x_{*0} del sistema [3.15] con $u = 0$, satisfaciendo $F(x_{*0}, 0) = 0$, esto es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_* \quad [3.16]$$

Una trayectoria caótica será estabilizada en una órbita periódica inestable $x_*(t)$ de periodo $m = 1$.

3.5.1.2 Seguimiento (tracking) de trayectorias caóticas

Sea $x_*(t)$ una solución T -periódica del sistema [3.15] con condición inicial $x_*(0) = x_{*0}$, es decir, $x_*(t + T) = x_*(t)$ para todo $t \geq 0$. Si la solución $x_*(t)$ es inestable, el objetivo de seguimiento es llevar las soluciones $x(t)$ a $x_*(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - x_*(t)] = 0 \quad [3.17]$$

Una trayectoria caótica será estabilizada en una solución T -periódica inestable $x_*(t)$ de periodo $m = 1, 2, 3, \dots$. Se puede observar que la estabilización de trayectorias caóticas es un caso especial del objetivo de tracking o seguimiento.

3.5.1.3 Generación de comportamiento caótico

Este objetivo de control también se llama *caotización* o *anticontrol* y busca la generación de oscilaciones caóticas. En este caso, $x_*(t)$ es estable y el objetivo de control será encontrar algún criterio formal de caos, por ejemplo, un exponente de Lyapunov positivo para el sistema dinámico.

Dada una función objetivo a caotizar $G(x)$, se plantearán dos objetivos:

1. Lograr la igualdad del límite:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x(t)) = G_* \quad [3.18a]$$

2. Lograr la desigualdad del límite:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(x(t)) \geq G_* \quad [3.18b]$$

Una elección típica para la función objetivo para caotizar un sistema será el máximo exponente de Lyapunov $G = \lambda_1$, entonces $G_* > 0$.

3.5.1.4 Sincronización controlada

Este objetivo busca efectuar un cambio coordinado en el estado de dos o más sistemas. El problema consiste en encontrar una función de control que asegure la sincronización del sistema en circuito abierto. Por ejemplo, el objetivo para la sincronización asintótica de dos estados del sistema, x_1 y x_2 , se puede expresar como:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x_1(t) - x_2(t)] = 0 \quad [3.19]$$

que implica la convergencia de la solución $x(t)$ al conjunto $\{x: x_1 = x_2\}$.

Los objetivos de control del caos de estabilización y seguimiento pueden considerarse como los problemas tradicionales de la teoría del control. La diferencia está en que los métodos del control del caos tratan con sistemas caóticos que buscan estabilizar puntos de equilibrio y orbitas inestables que se encuentran en el espacio de fases. (Chen, G., & Dong, X, 1993).

3.5.2 Métodos de control del caos

Los métodos de control aplicados a los sistemas dinámicos caóticos buscarán corregir/suprimir los movimientos irregulares producidos por el comportamiento no lineal de las variables o de los parámetros del sistema, y

tendrán la característica de que el sistema será controlado haciendo ajustes muy leves al parámetro de control. Los diferentes métodos para el control del caos han sido desarrollados por físicos teóricos, físicos experimentales y por matemáticos (Chen, G., & Dong, X., 1993); estos métodos se han ido aplicando en diversas áreas de la ciencia, y gracias al avance en el conocimiento de la dinámica de los sistemas sociales y económicos, el control de sistemas dinámicos también se ha llevado a este tipo de sistemas. (Dorf, J., 1989).

Los primeros intentos para controlar sistemas dinámicos caóticos proceden de finales de los años 80, encontrándose, por ejemplo, el trabajo de Hübler, A., Georgii, R., Kuckler, M., Stelzl, W., & Lüscher, E. (1988) quienes realizan una serie de estudios para llevar un sistema dinámico caótico a un objetivo dinámico deseado; el trabajo de Grantham, W.J., & Athalye, A.M; (1989) quienes investigan el control de sistemas caóticos o Pettini, M. (1989) quien señala que variando adecuadamente los parámetros de un sistema es posible reducir o suprimir el caos.

No existe una única clasificación de los métodos de control del caos⁴³, pero se puede decir que, en general, los distintos métodos harán uso de esquemas feed-forward (métodos que aplican fuerzas externas) o esquemas feed-back (métodos que modifican los parámetros a través de la realimentación del vector de estados) para modificar el comportamiento del sistema caótico.

3.5.2.1 Control feed – forward por señales periódicas

Los métodos de control feed-forward también se conocen como métodos no realimentados o en lazo abierto y consisten en cambiar el comportamiento de un sistema no lineal aplicando apropiadamente una excitación externa $u(t)$. El comportamiento del sistema dinámico cambia debido a

⁴³ Clasificación de métodos de control se pueden encontrar en Chen, G., & Dong, X. (1993); Boccaletti, S., Grebogi, C., Lai, Y.C., Mancini, H. & Maza, D. (2000) o Lynch, S. (2004).

perturbaciones periódicas en el parámetro de control. La forma de control en lazo abierto no necesita mediciones adicionales o sensores, por eso, es una forma de control más simple. Tiene la ventaja de su aplicabilidad a procesos muy rápidos como los existentes a nivel molecular donde no existe posibilidad de medir las variables del sistema. Fradkov, A., Evans, R., & Andrievsky, B. (2006).

Entre los métodos de control del caos que usan perturbaciones externas para actuar sobre la evolución del sistema usando fuerzas periódicas están Brainman, Y., & Goldhirsch, I. (1991) y usando ruido aleatorio como perturbación: Rajasekar, S., & Lakshmanan. M. (1992).

3.5.2.2. Control feed-back

Entre los métodos de control del caos que se basan en el control realimentado o feed-back se encuentran el método OGY (Ott, E., Gerbogi, C and Yorke, J, 1990), el método OPF (Occasional Proportional Feedback) introducido por Hunt, E. R. (1991) y Peng, B., Petrov, V., & Showalter, K. (1991); el método de Hübler, A., & Plapp, B. (1990) o el método de Pyragas, K. (1992).

En los siguientes apartados se explicará el método OGY de control del caos que aplica perturbaciones muy leves a uno de los parámetros del sistema caótico bajo estudio para estabilizar su dinámica.

3.6. Control por el método OGY (Ott, Gerbogi and Yorke, 1990)

El método OGY (Ott, Gerbogi and Yorke, 1990) es un método de realimentación lineal para estabilizar órbitas periódicas inestables (UPO por sus iniciales en inglés) de un sistema caótico⁴⁴. La implementación del algoritmo OGY requerirá estimar los valores propios asociados con la

⁴⁴ La primera supresión experimental de caos fue hecha por Ditto, W., Rauseo, S., & Spano, M. (1990) usando el método OGY.

ubicación deseada de la UPO escogida. El algoritmo o ley de control empleado se activará usando la dinámica natural del sistema, es decir, cuando la trayectoria caótica, en su recorrido natural, se aproxime a la órbita periódica elegida para estabilizarla en ella.

El método OGY usa esencialmente tres características de los atractores extraños que hacen precisamente que el sistema pueda ser controlado: sensibilidad a las condiciones iniciales, existencia de órbitas periódicas inestables y ergodicidad. De acuerdo con estas tres propiedades, el control de una trayectoria caótica se realizará cuando la trayectoria se aproxime ergódicamente a una órbita periódica inestable deseada que se encuentra en el atractor; en este momento se aplica una pequeña perturbación al parámetro del sistema que hará que la trayectoria se mueva hacia la vecindad de la órbita periódica deseada y se estabilice en ella. La sensibilidad a las condiciones iniciales hará posible alterar el comportamiento del sistema haciendo pequeñas perturbaciones en los parámetros.

Supongamos que se desea estabilizar una trayectoria caótica en una órbita periódica inestable del sistema, por ejemplo, una órbita periódica de periodo uno o punto fijo del sistema. Este punto tiene asociada una estructura geométrica, esto es, una dirección o variedad estable y una dirección o variedad inestable. Las trayectorias son atraídas hacia el punto fijo siguiendo la variedad estable y son repelidas siguiendo la variedad inestable.

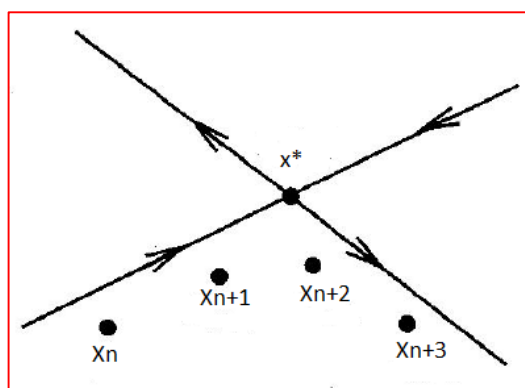


Figura 3.6. Trayectoria sin control

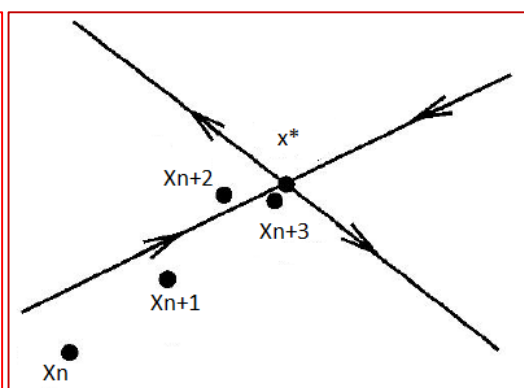


Figura 3.7. Trayectoria controlada

La idea básica es realizar pequeñas perturbaciones lineales sobre el parámetro del sistema para llevar la trayectoria del sistema siguiendo la variedad estable del punto fijo deseado y alejarlas de la variedad inestable.

Esto sólo se puede lograr si la trayectoria se encuentra en la *región de control*, esto es, en un pequeño vecindario del punto fijo. Cuando la trayectoria se encuentra en esta región, se activa la ley de control que actúa sobre el parámetro del sistema y, la trayectoria caótica, siguiendo la dirección estable, se estabilizará en el punto fijo del sistema. En caso de que no sea activada la ley de control, la trayectoria continuará siguiendo su movimiento caótico natural.

3.6.1 Ecuaciones de control

Dado el sistema dinámico discreto:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \quad [3.20]$$

Donde $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ y \mathbf{F} una función suave de sus variables. El estado del sistema depende de su estado anterior y del valor del parámetro \mathbf{u} .

El fundamento de la aplicación del método OGY es la variación controlada del parámetro del sistema (u) cuando se encuentre en una pequeña proximidad de su valor nominal u^0 y cuya variación estará restringida dentro de un rango:

$$|u - u^0| < \delta$$

Con $\delta \ll 1$.

El procedimiento consiste en aproximar linealmente la ecuación [3.20] en un punto fijo inestable del sistema (\mathbf{x}^*, u^0) :

$$\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^* = \mathbf{A}[\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^*] + \mathbf{B}(\mathbf{u}(k) - u^0) \quad [3.21]$$

Donde A es la matriz Jacobiana $n \times n$ y B es un vector $1 \times n$ – dimensional de derivadas respecto al parámetro u , evaluadas A y B en el punto fijo (x^*, u^0) :

$$A = D_x F(x, u)|_{x=x^*, u=u^0}$$

$$B = D_p F(x, u)|_{x=x^*, u=u^0}$$

El control se introduce en el sistema suponiendo que el parámetro u es una función lineal de la variable $x(k)$:

$$u - u^0 = -K^T[x(k) - x^*] \quad [3.22]$$

La expresión [3.22] es la **ley de control**, donde K^T es una matriz $1 \times n$ –dimensional y se determina de forma que el punto fijo (x^*, u^0) sea estable.

La ley de control [3.22] se activa cuando la trayectoria $x(k)$ se aproxime a la pequeña vecindad de la órbita periódica elegida, es decir, cuando $|x(k) - x^*| \ll 1$ con lo cual la perturbación $u - u^0$ será pequeña. De otra forma la trayectoria del sistema evolucionará de acuerdo con el valor nominal del parámetro u^0 .

De esta forma la ley de control se establece como:

$$\begin{cases} u = u^0 & , si |x(k) - x^*| > \delta_0 \\ u = u^0 - K^T[x(k) - x^*] & , si |x(k) - x^*| \leq \delta_0 \end{cases}$$

Asumiendo que nos encontramos en el la vecindad del punto fijo y que por tanto se activa la ley de control, sustituyendo [3.22] en [3.21] se obtiene:

$$x(k+1) - x^* = (A - BK^T)[x(k) - x^*] \quad [3.23]$$

El punto fijo será estable si la matriz $(A - BK^T)$ es asintóticamente estable, es decir, si todos los valores propios de la matriz $(A - BK^T)$ tienen módulo menor que la unidad. De esta forma el control del sistema [3.20] requiere por tanto encontrar el vector K^T que haga que el punto fijo (x^*, u^0) sea estable en [3.23].

Empleando la técnica de emplazamiento de polos se podrá determinar el valor de K^T para que la matriz del sistema en lazo cerrado $(A - BK^T)$ tenga valores propios (polos reguladores $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$) con módulo menor que la unidad previamente especificados para que el punto fijo (x^*, u^0) sea estable en [3.23].

De acuerdo con Romeiras et al (1992, p. 83), la elección de la matriz de ganancias de realimentación K^T se puede hacer de diferentes formas. En principio, cualquier elección de los polos reguladores dentro del círculo unidad es válida. Sin embargo, como con la variación del parámetro de control se busca llevar la trayectoria caótica en la dirección estable de la órbita periódica elegida en cada iteración, una elección adecuada corresponderá a igualar los valores propios o polos reguladores $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ de la matriz $(A - BK^T)$ con los valores propios estables de la matriz del sistema A ($\lambda_s(A)$) y los valores propios inestables de A ($\lambda_u(A)$) igualarlos a cero. Esto hará que K^T tenga una dirección paralela a la dirección estable del punto periódico elegido.

3.7. Ejemplos de control de algunos modelos usando el método OGY.

A continuación mostraremos cómo pueden controlarse algunos de los sistemas caóticos presentados en el capítulo anterior

3.7.1 Control de la aplicación de Hénon

La aplicación bidimensional de Hénon está definida por:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= a - x_k^2 + by_k \\ y_{k+1} &= x_k\end{aligned}\tag{3.24}$$

Con $a > 0$ y $|b| < 1$

Siguiendo a Romeiras et al (1992) y a Solé, R., & Manrubia (2001), en este ejemplo el control de esta aplicación se hará para $b = 0.3$ y el parámetro de control a variará alrededor del valor nominal $a^0 = 1.4$ restringido al rango:

$$|a - a^0| < \delta$$

Con $\delta \ll 1$.

De acuerdo con el método OGY de control del caos, debemos localizar un punto periódico en el cual estabilizar una trayectoria caótica de la aplicación. Los puntos periódicos de periodo uno del sistema de Hénon se hallan resolviendo las siguientes ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned}a - x_k^2 + by_k - x &= 0 \\ x_k - y_k &= 0\end{aligned}$$

Y obtenemos la ecuación:

$$ax_k^2 + (1 - b)x_k - 1 = 0$$

resolviendo por la fórmula cuadrática:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2a} \left(b - 1 \pm \sqrt{(b - 1)^2 - 4a} \right) = \frac{1}{2.8} (-0.7 \pm \sqrt{6.09})$$

obtenemos dos puntos fijos:

- $(x_1, y_1) = (0.6314, 0.6314)$

y

- $(x_2, y_2) = (-1.1314, -1.1314)$.

La aplicación se estabilizará en el punto $(x_1, y_1) = (0.6314, 0.6314)$. Linealizando alrededor de este punto tenemos:

$$\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{z}_E = \mathbf{A}(\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_E) + \mathbf{B}(a - a^0) \quad [3.25]$$

donde $\mathbf{z}_k = (x_k, y_k)^T$, $\mathbf{z}_E = (x_1, y_1)^T$, \mathbf{A} es la matriz Jacobiana del sistema y \mathbf{B} es un vector $1 \times n$ -dimensional de derivadas respecto al parámetro de control. \mathbf{A} y \mathbf{B} se evalúan en el punto fijo:

$$\mathbf{A} = D_z F(\mathbf{z}, a)|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}_E, a=a^0} = \begin{pmatrix} -2z_E & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.2627 & 0.3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = D_a F(\mathbf{z}, a)|_{\mathbf{z}=\mathbf{z}_E, a=a^0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El control se introduce suponiendo que el parámetro a es una función lineal de las variables de estado:

$$\begin{cases} a = a^0 & , \text{si } |\mathbf{K}^T(\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_E)| > \delta_0 \\ a = a^0 - \mathbf{K}^T(\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_E) & , \text{si } |\mathbf{K}^T(\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_E)| \leq \delta_0 \end{cases} \quad [3.26]$$

Sustituyendo [3.26] en [3.25] obtenemos el sistema linealizado en lazo cerrado:

$$\mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{z}_E = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}^T)(\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_E) \quad [3.27]$$

El punto fijo \mathbf{z}_E es estable si la matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}^T)$ tiene polos reguladores en módulo menor que la unidad. De acuerdo con el criterio de Romeiras et al (1992), éstos se ubicarán en $\mu_1 = \lambda_u(\mathbf{A}) = 0$ y $\mu_2 = \lambda_s(\mathbf{A})$.

Siguiendo los pasos de diseño para la ubicación de polos (Ogata;1998:792-793) hallaremos la matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}^T)$:

- Verificamos la condición de controlabilidad para el sistema:

$$\mathbf{C} = (\mathbf{B} : \mathbf{AB}) = \begin{pmatrix} 1 & -2az_E \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1.2627 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz de controlabilidad es de rango 2. El sistema es de estado completamente controlable y es posible la ubicación arbitraria de polos

- Encontramos el polinomio característico de **A**:

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \lambda + 1.2627 & -0.3 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1.2627\lambda - 0.3$$

Los coeficientes de **A** son: $a_1 = 1.2628$ y $a_2 = -0.3$

- Obtenemos los valores propios de **A**:

$$\lambda_s(\mathbf{A}) = 0.2045 \text{ y } \lambda_u(\mathbf{A}) = -1.4673$$

- La solución al problema del emplazamiento de polos está dada por:

$$\mathbf{K}^T = \{\alpha_2 - a_2, \alpha_1 - a_1\} \mathbf{T}^{-1}$$

- Hallamos las matrices **W** y **T**:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1.2627 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{T} = \mathbf{C}^* \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1 & -1.2627 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1.2627 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Hallamos el polinomio característico deseado usando los valores propios deseados:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.2045 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 0.2045\lambda$$

Los coeficientes del polinomio deseado son: $\alpha_1 = -0.2045$ y $\alpha_2 = 0$.

- Hallamos la matriz de ganancias **K**^T:

$$\mathbf{K}^T = \{\alpha_2 - a_2, \alpha_1 - a_1\} \mathbf{T}^{-1} = \{-1.4672, 0.3\}$$

Esto es $K_1 = -1.4672$ y $K_2 = 0.3$

La aplicación de Hénon así controlada cuando el sistema entra en la vecindad del punto fijo es:

$$x_{n+1} = (-k_1(x_n - x_1) - k_2(y_n - x_1) + a) - x_n^2 + by_n$$

$$y_{n+1} = x_n$$

En la figura 3.8 se muestra la trayectoria del modelo de Henon activando el control a partir del instante $t=200$. Como puede observarse, a partir de este instante, cuando el sistema entra en la vecindad adecuada, entra en funcionamiento la regla de control y la dinámica del sistema se estabiliza en el punto fijo tal y como se buscaba con el control.

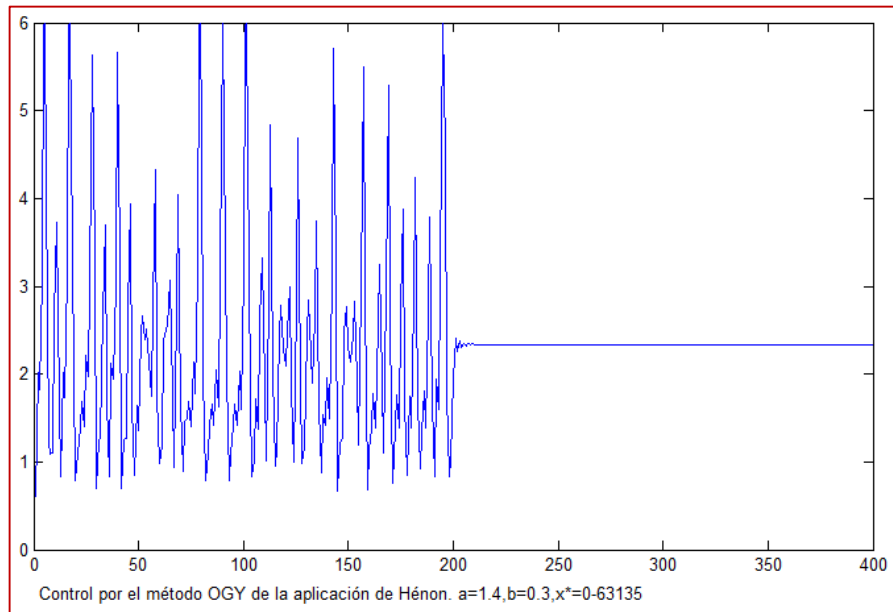


Figura 3.8. Estabilización de la aplicación de Hénon en un comportamiento deseado.

3.7.2. Control de la aplicación logística

Siguiendo a Lai, Y-C., (1994), estabilizaremos una trayectoria caótica de la aplicación logística:

$$x_{k+1} = f(x_k, r) = rx_k(1 - x_k); \quad x \in [0,1], r \in [0,4] \quad [3.28]$$

en una órbita de periodo uno $x^* = 0.7368$ y luego en una órbita de periodo dos con componentes $x(1) = 0.3737$ y $x(2) = 0.8894$ ⁴⁵. Se usará el valor nominal de $r^0 = 3.8$ para el cual la aplicación muestra comportamiento caótico, tal como se observa en la gráfica de bifurcación Figura 3.9.

⁴⁵ Donde $x^0 = 1 - \frac{1}{r}$ y $x_{1,2} = \frac{1+r \pm \sqrt{r^2 - 2r - 3}}{2r}$

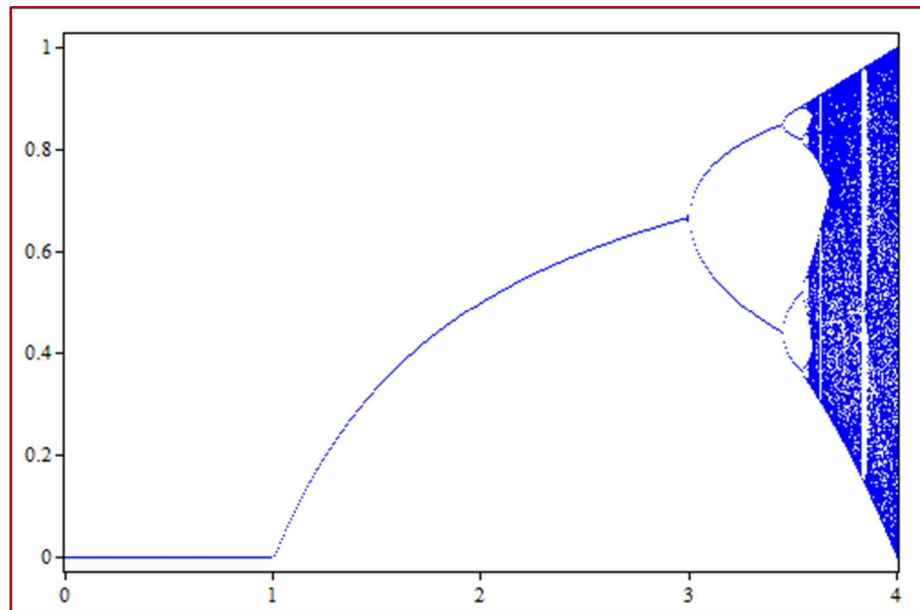


Figura 3.9. Gráfico de bifurcación del parámetro r .

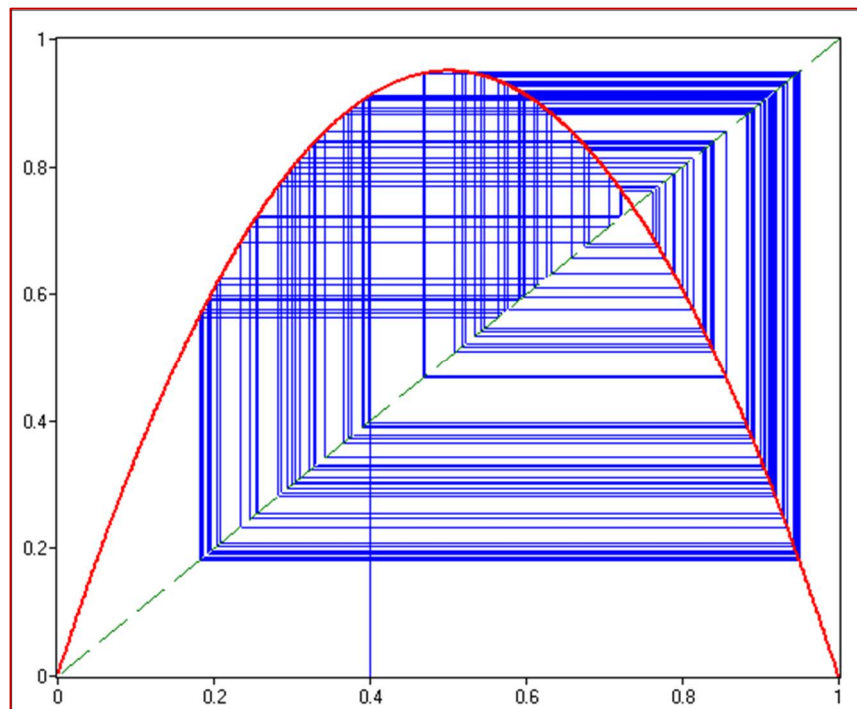


Figura 3.10. Gráfica de la aplicación: $x_{k+1} = 3.8x_k(1 - x_k)$, $x_0 = 0.4$

Como se sabe, el atractor caótico contiene un número infinito de órbitas periódicas inestables, pudiéndose elegir cualquiera de ellas.

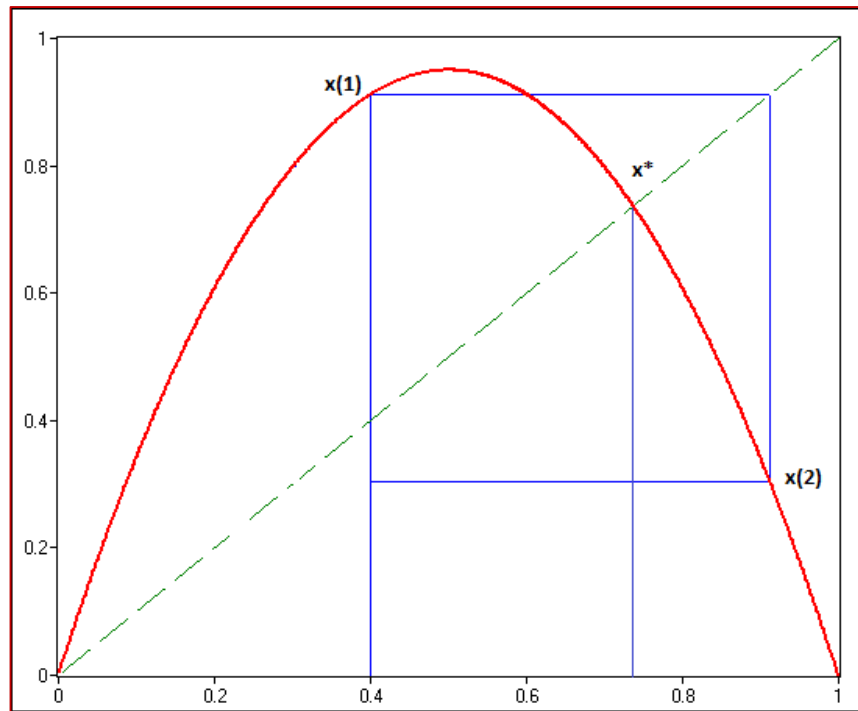


Figura 3.11. Gráfica de la función $x_{k+1} = 3.8x_k(1 - x_k)$, $x_0 = 0.4$ con las órbitas periódicas elegidas.

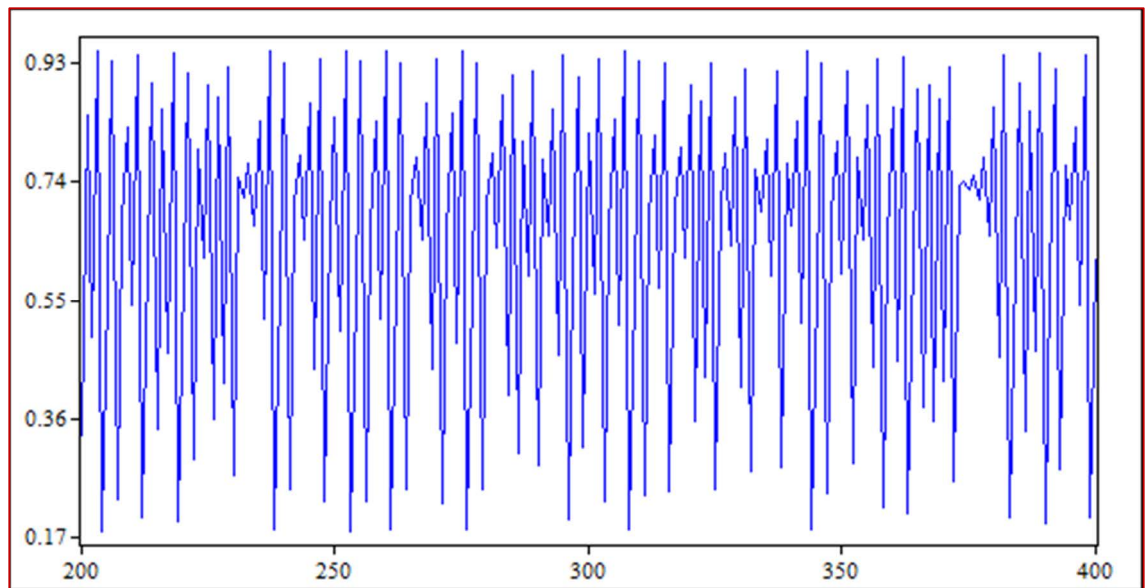


Figura 3.12. Gráfica de la trayectoria caótica $x_{k+1} = 3.8x_k(1 - x_k)$, $x_0 = 0.4$

El parámetro r será graduado dentro de un pequeño rango alrededor del valor nominal $[r^0 - \delta, r^0 + \delta]$, esto es, $[3.8 - \delta, 3.8 + \delta]$ con $\delta \ll 1$. La perturbación máxima elegida es $\delta_{max} = 0.005$. Como el movimiento dentro de un atractor caótico es ergódico, una trayectoria con condición inicial

arbitraria x_0 , y con probabilidad unitaria, pasará cerca de la vecindad de la órbita periódica elegida.

Debido a la sensibilidad a las condiciones iniciales, la trayectoria rápidamente se desviará de la órbita periódica. El control hará que con la variación del parámetro la trayectoria permanezca en la vecindad de la órbita periódica y se estabilice en ella.

Llamando $x(i)$ a la órbita periódica elegida, la dinámica de la aplicación logística linealizada en la vecindad de esta órbita es:

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x(i) &= \left. \frac{\partial f(x,r)}{\partial x} \right|_{x=x(i), r=r^0} [x_k - x(i)] + \left. \frac{\partial f(x,r)}{\partial r} \right|_{x=x(i), r=r^0} [r_k - r^0] \\ &= r^0 [1 - 2x(i)] [x_k - x(i)] + x(i) [1 - x(i)] [r_k - r^0] \end{aligned} \quad [3.29]$$

La ley de control $\delta r_k = [r_k - r^0]$ se elige de tal forma que x_{k+1} se aproxime a la vecindad de $x(i)$ en la siguiente iteración, por lo tanto $x_{k+1} - x(i) = 0$, de esta forma, despejando:

$$\delta r_k = \frac{r^0 [2x(i) - 1] [x_k - x(i)]}{x(i) [1 - x(i)]} \quad [3.30]$$

La ley de control [3.30] se activa cuando la trayectoria x_k aparece en la pequeña vecindad de la órbita periódica elegida $x(i)$, es decir, cuando $\delta x_k = [x_k - x(i)] \ll 1$ y, por lo tanto, la perturbación δr_k es pequeña. De otra forma el sistema evolucionará de acuerdo con el valor inicial del parámetro r_0 .

Estabilizaremos ahora la órbita de periodo $x^* = 0.7368$. La dinámica de la aplicación logística linealizada en la vecindad de x^* es:

$$x_{k+1} - x^* = \left. \frac{\partial f(x,r)}{\partial x} \right|_{x=x^*, r=r^0} [x_k - x^*] + \left. \frac{\partial f(x,r)}{\partial r} \right|_{x=x^*, r=r^0} [r_k - r^0] \quad [3.31]$$

Donde:

$$\left. \frac{\partial f(x, r)}{\partial x} \right|_{x=x^*, r=r^0} = r^0 [1 - 2x^*] = -1.8$$

$$\left. \frac{\partial f(x, r)}{\partial r} \right|_{x=x^*, r=r^0} = x^* [1 - x^*] = 0.1939$$

La regla de control será:

$$\delta r_k = [r_k - r^0] = -K[x_k - x^*] \quad [3.32]$$

Sustituyendo [3.32] en [3.31]:

$$x_{k+1} - x^* = (-1.8 - 0.1939 * K) [x_k - x^*]$$

Cualquier valor de K que haga que $|-1.8 - 0.1939 * K| < 1$ sería válido. Como en este caso no existe un valor propio de la matriz \mathbf{A} estable (menor que la unidad, ya que el único valor propio de \mathbf{A} es precisamente -1.8 que es inestable), podemos elegir cualquier K . Una de estas posibilidades es la que hace que x_{k+1} se aproxime a la vecindad de x^* en la siguiente iteración, por lo tanto $x_{k+1} - x^* = 0$, de esta forma se tendría, despejando:

$$0 = (-1.8 - 0.1939 * K) [x_k - x^*]$$

$$0 = (-1.8 - 0.1939 * K)$$

$$K = \frac{-1.8}{0.1939} = -9.2829$$

Nótese que en este caso $|-1.8 - 0.1939 * K| = 0$, por lo que se cumple la condición de estabilidad del sistema

El sistema con control por tanto será:

$$x_{k+1} = f(x_k, r_{k+1}) = r_{k+1}x_k(1 - x_k); x \in [0,1], r \in [0,4] \quad [3.33]$$

$$r_{k+1} = \begin{cases} r^0 & \text{si } |x_k - x^*| \geq \delta_{max}/K \\ r^0 - K[x_k - x^*] & \text{si } |x_k - x^*| < \delta_{max}/K \end{cases}$$

con $\delta_{max} = 0.005$ la máxima variación del parámetro r permitida $|r_k - r^0| < \delta_{max}$

Con control, cuando el sistema entra en la vecindad se aplica la regla, y como no hay perturbaciones que alejen el sistema del punto fijo inestable, el sistema permanecerá en él. Además, como K se ha elegido para llegar en un solo periodo al punto fijo inestable solo es necesario intervenir una vez.

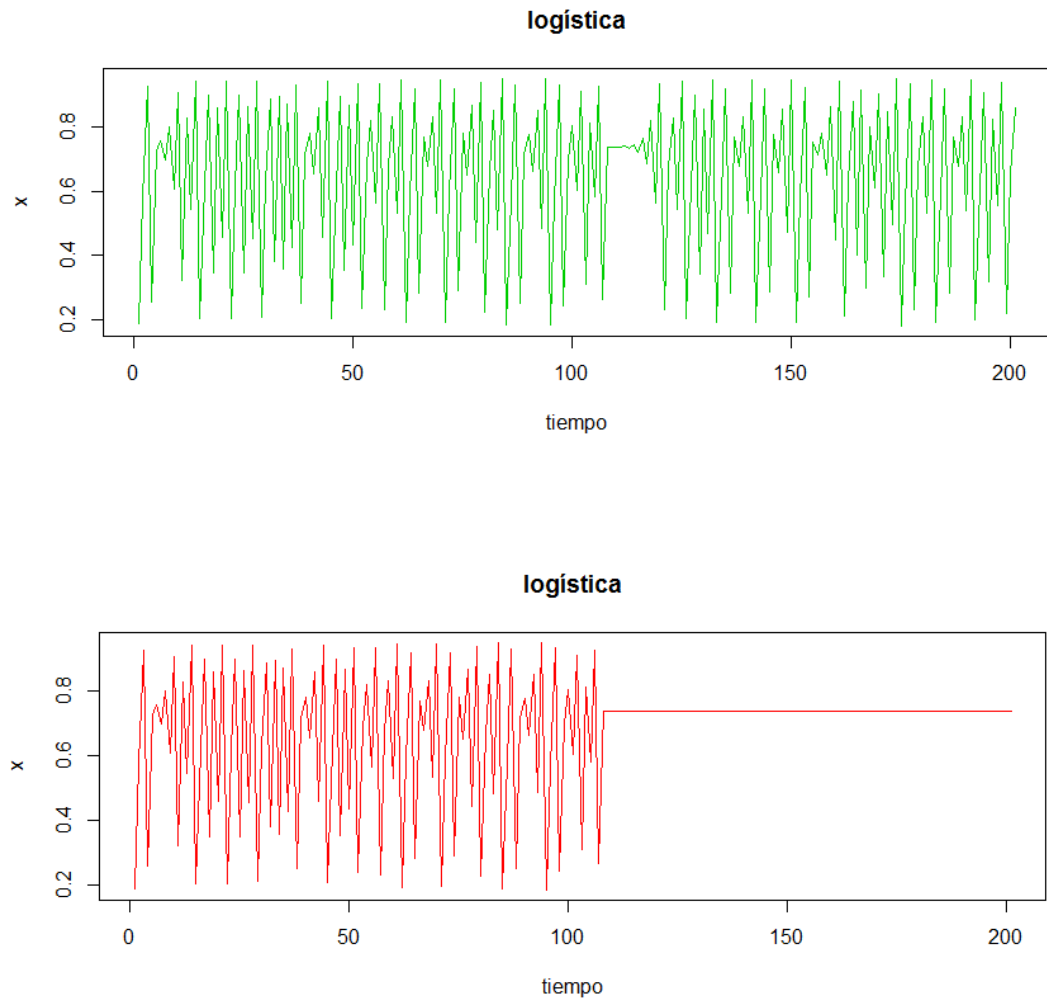


Figura 3.13. Trayectoria caótica de la aplicación logística (grafico superior) y estabilizada en la órbita de periodo uno $x^* \approx 0.7368$ (gráfico inferior).

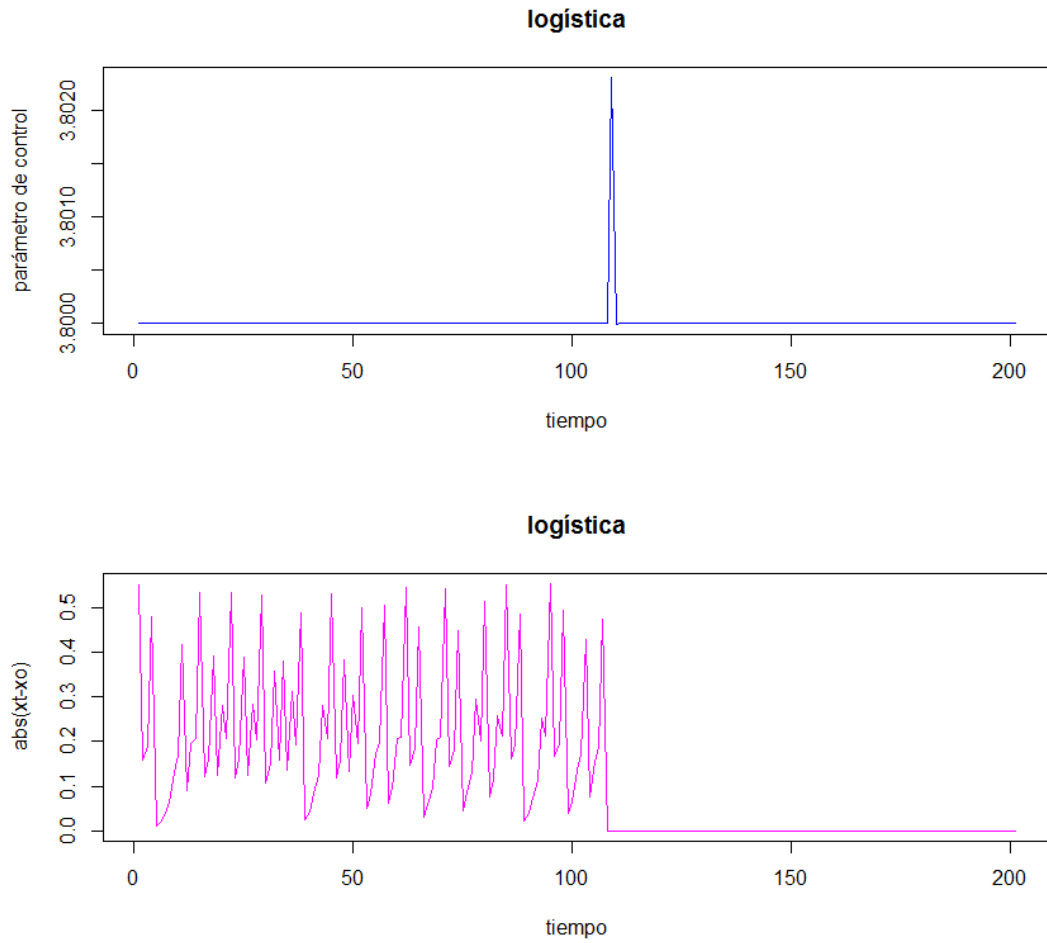


Figura 3.14. Intervención en el parámetro de control para estabilizar el punto fijo (gráfico superior) y diferencia entre el valor de x y el punto fijo (gráfico inferior)

Aplicando esta regla de control [3.30] pueden estabilizarse otros equilibrios dinámicos. Por ejemplo para un ciclo límite periodo dos

$$x_{1,2} = \frac{1 + r \pm \sqrt{r^2 - 2r - 3}}{2r}$$

Estabilizando el punto x_1 la ecuación logística alcanza este ciclo límite periodo dos y [3.30] nos determina los cambios necesarios en el parámetro de control para permanecer en la órbita

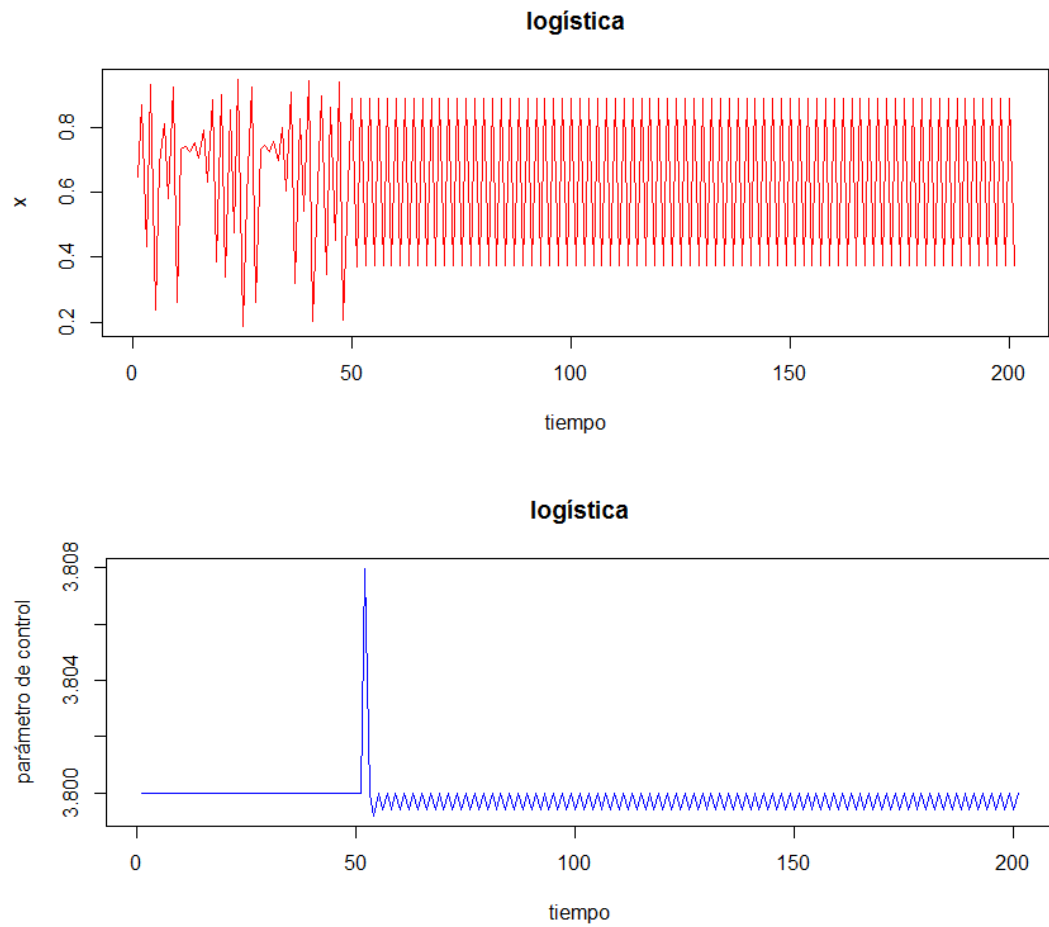


Figura 3.15. Trayectoria caótica de la aplicación logística estabilizada en la órbita de periodo dos $x(1) \approx 0.3737$ y $x(2) \approx 0.8894$

La diferencia en el cálculo de la ley de control de un mapa de una dimensión y un mapa de dos o más dimensiones es que las órbitas periódicas inestables de estos últimos, tendrán una dirección estable y una dirección inestable, haciendo algo más complicado el cálculo del algoritmo de control.

CAPÍTULO 4

FUNDAMENTOS Y REGLAS DE POLÍTICA MONETARIA

La forma en la cual los bancos centrales han manejado la política monetaria en cuanto a objetivos y métodos se ha modificado a lo largo del tiempo. Ello ha sido debido a múltiples motivos. Así, las altas tasas de inflación registradas durante los años 70 y 80 condujeron a muchos bancos centrales a establecer como objetivo primario de la política monetaria un nivel bajo de inflación, además, porque se reconocía que éste es un requisito para tener niveles de crecimiento elevados. De otra parte se encuentra la inestabilidad en la función de demanda de dinero que dificulta el seguimiento y control de los agregados monetarios usados tradicionalmente como meta intermedia en la estrategia de control en dos niveles seguida por los bancos centrales. Así mismo, los problemas de inconsistencia temporal, generados por la conducción discrecional de la política monetaria mostraron la efectividad de las reglas monetarias para estabilizar la economía.

La gestión de la política monetaria ha evolucionado, entonces, hacia un compromiso más fuerte por parte de los bancos centrales para controlar la inflación y mantener la estabilidad de precios. Este objetivo final de la política monetaria se concreta a través de un régimen operacional de control directo de la inflación o “inflation targeting” bajo el cual se realiza actualmente la conducción de la política monetaria. Bajo el régimen de metas de inflación se hará necesario el uso de reglas (Taylor 2000) y éstas serán las funciones de reacción de los bancos centrales que a la vez permitirán evaluar la conducción de la política monetaria.

Este capítulo abordará primero los fundamentos y las estrategias de política monetaria y se centrará luego en las reglas de política, en especial en la regla de Taylor (Taylor, 1993), como estabilizadoras de las variables objetivo de la política monetaria.

4.1 Fundamentos de política monetaria

La Teoría de la Política Económica indica cómo *deben* actuar las autoridades económicas para formular políticas óptimas (Fernández Díaz et al, 1999, cap 3). En ese sentido, la especificación de una función de bienestar social que contenga los objetivos que se quieren lograr para el conjunto de la sociedad, junto con la especificación de los instrumentos de política y un modelo que vincule instrumentos y objetivos, serán considerados como los elementos necesarios para la formulación de políticas óptimas en lo que ha venido a denominarse como *modelos de decisión* de los *policy maker*⁴⁶.

En general, la política económica busca maximizar el bienestar social a través del logro de unos niveles óptimos para unas variables objetivo. Una política óptima consistirá en lograr que una variable coincida con su nivel deseado, por ejemplo, una política óptima para la inflación establecerá que la tasa de inflación π coincida con su objetivo π^* ($\pi = \pi^*$). La aplicación de la política económica consistirá en hacer que las variables objetivo regresen a sus niveles deseados cuando sean desviados de ellos por choques exógenos o por la propia dinámica de la economía. La forma en la cual lo hará será a través de la selección de unos instrumentos de política económica (fiscal y monetaria principalmente) que moverán a la economía hacia su óptimo, esto es, a los niveles deseados de maximización del bienestar social.

⁴⁶ Jan Tinbergen (1952) fue uno de los primeros economistas en proponer los pasos para formular estos modelos de decisión y derivar las políticas óptimas.

Un problema en la aplicación de la política económica se presenta cuando existe “trade-off” entre objetivos, es decir, cuando el logro de un objetivo (por ejemplo, reducir la inflación) implica un costo en términos de otro objetivo (contraer la producción y el empleo). En este caso, las autoridades económicas formularán una *función de pérdida social* que representará el costo social de las desviaciones de los objetivos de sus niveles óptimos (Theil, 1958) . Esta función se podrá representar así:

$$L = \alpha(X - X^*)^2 + \beta(Y - Y^*)^2 \quad [4.1]$$

Donde L representa la pérdida total para la sociedad de no lograr ninguno de los objetivos, X y Y representan dos objetivos de política, X^* y Y^* son los niveles óptimos para las variables X y Y . Los parámetros α y β reflejan la importancia relativa de cada uno de los objetivos.

El bienestar social se reduce cuando las metas para las variables objetivo X y Y no se alcanzan y la pérdida de bienestar será proporcional a la desviación cuadrática de cada objetivo de su respectivo nivel óptimo: si X es diferente de X^* , la pérdida se medirá por $(X - X^*)^2$ y de igual forma para la variable Y . La pérdida de bienestar total para la sociedad por no alcanzar ningún objetivo estará dada por la suma de las desviaciones cuadráticas de cada objetivo, como indica la ecuación [4.1].

De esta forma, las autoridades económicas cuentan con un conjunto de objetivos e instrumentos y deberán proceder de forma tal que la consecución de los objetivos se obtenga con el menor costo posible para la sociedad a través de la minimización de una función social de pérdidas.

La conexión entre instrumentos y objetivos finales se ha realizado tradicionalmente usando objetivos intermedios, sin embargo, muchos bancos centrales actualmente ajustan directamente el instrumento de política para alcanzar un objetivo final. Estas estrategias de política monetaria se conocen como estrategia en dos niveles y en un nivel respectivamente.

4.1.2. Estrategia en dos niveles de la Política Monetaria

La estrategia tradicional de política monetaria establece una articulación en dos niveles entre instrumentos monetarios y objetivos finales de política económica. En el primer nivel de la estrategia, los objetivos finales se tratan de alcanzar a través de un objetivo intermedio y, en el segundo nivel, el objetivo intermedio será modificado a través de una variable operativa, que es controlada con los instrumentos de política monetaria.

La particularidad de esta estrategia se encuentra en el uso de variables intermedias que cumplen con dos funciones: ser objetivos inmediatos que se lograrán con el manejo de los instrumentos monetarios y, ser el medio para conseguir los objetivos finales (Fernández Díaz, et al., 1999, p. 280).

Esta doble función de las variables intermedias se debe a que el banco central no puede lograr los objetivos finales directamente con sus instrumentos de política monetaria, por tanto, las autoridades monetarias actúan a través de los instrumentos, que son variables sobre las que el banco puede operar directamente para modificar las variables intermedias y con la modificación de las variables intermedias, alcanzar el objetivo final.

El banco central deberá elegir entre las siguientes variables para implementar su estrategia en dos niveles:

- Variables-Objetivos finales: nivel de empleo (reducción del desempleo), nivel de precios (inflación baja y estable), producción (mayor tasa de crecimiento de la renta o producción real), balanza de pagos (mejora en el saldo de la balanza de pagos) ⁴⁷.

⁴⁷ El BCE, de acuerdo con el artículo 105(1) del Tratado de la UE, tiene como objetivo primario mantener la estabilidad de precios. La Reserva Federal de Estados Unidos tiene como objetivos primarios lograr un crecimiento económico en línea con el potencial de la economía, alto nivel de empleo, estabilidad de precios, y tasas de interés de largo plazo moderadas (Board of Governors, 1994, p. 2).

- Variables intermedias: agregados monetarios (M1, M2, M3, M4), tipos de interés (medio y largo plazo), tipo de cambio.
- Variables operativas: tipos de interés de corto plazo, base monetaria, liquidez bancaria.
- Instrumentos: operaciones de mercado abierto, tasa de descuento y requerimientos de reservas.

La elección de un objetivo intermedio se hizo con base en la existencia de una relación estable y predecible entre el objetivo final y el objetivo intermedio⁴⁸ y entre la variable intermedia y el instrumento monetario. Con base en esta relación estable, muchos países usaron los agregados monetarios (M1,..., M4) como objetivo intermedio de la política monetaria ya que bajo la hipótesis de que la inflación es un fenómeno monetario, la estabilidad de precios se logrará controlando la cantidad de dinero.

En el manejo de la política monetaria en dos niveles, la oferta de dinero es una variable exógena determinada de forma discrecional por el banco central usando los instrumentos monetarios en función de sus objetivos de política. Ajustando la oferta de dinero, los bancos centrales influirán sobre la economía cuando existan desequilibrios en el mercado monetario, compensando los cambios en la demanda de dinero con cambios en la oferta de dinero. Así, si las autoridades monetarias desean incrementar la oferta de dinero, comprarán bonos e introducirán dinero a la economía y cuando deseen contraer la oferta monetaria, retirarán dinero de la economía vendiendo bonos.

Sin embargo, los bancos centrales no tienen un poder completo sobre la oferta monetaria; por ello deben modificar la base monetaria, compuesta por la oferta de dinero físico más las reservas de los bancos comerciales mantenidas en las cuentas de los bancos centrales para controlar la oferta

⁴⁸ La relación estable entre la variación en la cantidad de dinero y la renta nominal es observable (deducible) de la ecuación de cambios de Fischer: $MxV=PxY$.

monetaria. Así, las autoridades monetarias manejan indirectamente la oferta monetaria manejando directamente la base monetaria. Entre más estable sea la relación entre la base monetaria y la oferta de dinero será más fácil para los bancos centrales implementar la política monetaria. El banco central ajustará la oferta de dinero ante la existencia de desequilibrios monetarios y la efectividad estabilizadora de sus acciones dependerá de la estabilidad entre la base monetaria y la oferta de dinero.

4.1.3. Estrategia directa o en un nivel de la Política Monetaria

El contexto financiero en el que se desarrolló la política monetaria durante los años ochenta se vio transformado por procesos relacionados con la innovación financiera, la desregulación de los mercados financieros internos o la creciente integración de los mercados de capitales creando inestabilidad en la demanda de dinero⁴⁹ y deteriorando la relación estable entre las variables intermedia y final de la política monetaria.

La estrategia en un solo nivel busca superar estas dificultades para la conducción de la política monetaria actuando directamente en el control directo de la inflación a través de un instrumento de tasa de interés nominal de corto plazo. Las decisiones de los bancos centrales estarán guiadas por reglas flexibles, estables y predecibles que garantizarán el compromiso de las autoridades económicas con el logro de los objetivos últimos; así mismo, el empleo de reglas limitará la discrecionalidad, en muchos casos causante de inestabilidad económica debido a los problemas de inconsistencia temporal.

Así, la conducción de la política monetaria que siguen los bancos centrales en la actualidad para lograr sus objetivos estabilizadores se enmarca en un régimen de política monetaria conocido como “inflation targeting” que prioriza

⁴⁹ La innovación financiera introdujo nuevos activos financieros que ofrecieron gran liquidez y rentabilidad a sus poseedores; estos nuevos activos financieros dificultaron la definición de dinero ya que en sentido estricto no son dinero y generaron inestabilidad en la demanda de dinero.

el control directo de la inflación como objetivo final de la política monetaria y las decisiones de política se dirigen a la consecución de un nivel de precios estable o una baja inflación con el fin de crear un marco de estabilidad en el cual, la inflación y las expectativas de inflación no alteren la toma de decisiones de los agentes económicos.

En el diseño de una estrategia de control directo de la inflación o *inflation targeting*, el objetivo último seguido en la mayoría de países es la estabilización de la tasa de inflación en torno a un objetivo. La inflación es medida por un índice de precios al consumo (IPC); puede estar fijado en un número concreto o en una banda (cuya amplitud suele ser, en general, de dos puntos porcentuales)⁵⁰ y su identificación actúa como un mecanismo de disciplina ya que, establecerá una referencia clara para evaluar el cumplimiento de las autoridades monetarias⁵¹.

En el diseño de la estrategia de control directo de la inflación, las autoridades monetarias de cada país también tendrán que decidir, además del valor numérico del objetivo (valor fijo o fluctuación en una banda), la velocidad de aproximación a este objetivo, las desviaciones respecto al mismo o su modificación.

La importancia que tiene la fijación de un objetivo último de inflación es que debe “constituir un buen ancla para las expectativas de inflación, esto es, ser establecido de forma clara y simple, ser factible, ser flexible para permitir que la política monetaria reaccione a los shocks inesperados y a entornos económicos variables, ser fácilmente verificable para comprobar la responsabilidad del banco central. (Fernández Díaz, et al., 1999, p. 293).

⁵⁰ El objetivo numérico para la inflación ha estado casi siempre alrededor de 2% de crecimiento de un índice de precios al consumo. También se ha dejado fluctuar dentro de una banda que normalmente se ha fijado en un rango entre 1% y 3%, como en el caso de Nueva Zelanda; así mismo, existe la posibilidad de fijar un objetivo numérico específico de 2% que pueda fluctuar en un rango entre 1% y 3% como se ha hecho en Canadá y Suiza o, que exista un objetivo preciso sin que fluctúe dentro de un rango, como es la meta de 2% de inflación en el Reino Unido o de 2.5% en Noruega. (Svensson, L, 2010:127).

⁵¹ El primer país en adoptar la estrategia de control directo de la tasa de inflación fue Nueva Zelanda en 1990, luego Canadá en 1991, Reino Unido en 1992 y muchos otros países lo han adoptado desde entonces.

El enfoque de meta de inflación para conducir la política monetaria se caracteriza de manera más formal a través de la minimización de una función cuadrática de pérdida por parte del banco central cuyos argumentos son la desviación de la inflación de su meta y la desviación de la producción de su capacidad potencial:

$$L = \alpha(\pi - \pi^*)^2 + \beta(Y - Y^*)^2 \quad [4.2]$$

Como objetivo operacional, la estrategia en un nivel emplea el tipo de interés a corto plazo, puesto que son una buena guía operativa al recoger las expectativas sobre la inflación futura. Los bancos centrales actúan modificando los tipos de interés, elevándolos cuando hay presiones de demanda que probablemente eleven la presión sobre la inflación en relación a su meta en el futuro y, bajando los tipos de interés cuando la capacidad productiva de la economía esté por debajo de su nivel potencial puesto que la presión sobre la inflación futura respecto a su objetivo será menor.

Los bancos centrales anunciarán públicamente la tasa de interés que regirá el mercado, que es la tasa de corto plazo (*overnight*) que los bancos se cobran entre sí para obtener préstamos y la modificación del tipo de interés se hará, principalmente, a través del manejo de las Operaciones de Mercado Abierto, mediante la compra y venta de valores (letras del tesoro, bonos del gobierno). El banco pondrá dinero en la economía vendiendo estos valores con lo cual hará descender la tasa *overnight*. La tasa se elevará cuando el banco central compre los valores en un proceso de endurecimiento de la política monetaria.

Con estas acciones las autoridades monetarias esperan que los cambios en la tasa de política actúen sobre las otras tasas de interés que son relevantes en la economía.⁵²

⁵² La *trampa de la liquidez* pone un límite al uso del tipo de interés como variable de control de la política monetaria, ya que cuando éste es muy bajo, la demanda de dinero será muy elástica (se demandará cualquier cantidad de dinero a ese tipo de interés) pues no se demandarán bonos (activo alternativo al dinero) y un aumento en la oferta de dinero será absorbido por la demanda, sin que se altere el tipo de interés.

De acuerdo con Mishkin (2011), los resultados teóricos que sustentan la actual ejecución de la política monetaria son⁵³:

- 1) La inflación es siempre y en todo momento un fenómeno monetario.
- 2) La estabilidad de precios tiene importantes beneficios.
- 3) No hay intercambio en el largo plazo entre inflación y desempleo.
- 4) Las expectativas juegan un papel importante en la determinación de la inflación y en la transmisión de la política monetaria a la economía.
- 5) La tasa de interés real necesita elevarse cuando la inflación es alta, i.e., aplicación del Principio de Taylor.
- 6) La política monetaria enfrenta un problema de inconsistencia temporal.
- 7) La independencia del banco central mejora la eficiencia de la política monetaria.
- 8) Un compromiso con un ancla nominal produce buenos resultados de política monetaria.
- 9) Las fricciones financieras tienen un papel importante en los ciclos económicos.

4.1.4 Política monetaria discrecional

Por política discrecional se puede entender la toma de decisiones que no está restringida a un compromiso comunicado por anticipado, es decir, las autoridades tienen libertad para escoger la política que consideren adecuada

⁵³ Los primeros ocho elementos son postulados teóricos de la Nueva Síntesis Neoclásica.

en cada momento del tiempo. Sin embargo, no se refiere a la toma de decisiones sin un patrón de comportamiento o como indicativa de una conducta aleatoria. (Castañeda, 2004)

Una política monetaria discrecional por tanto, es una política no reglada, en la cual las autoridades optimizan la elección de instrumentos en cada momento del tiempo. Por ejemplo, en la estrategia en dos niveles, y bajo la hipótesis de que la oferta de dinero es exógena, la alteración de la cantidad de dinero por parte del banco central fue hecha de forma discrecional, fijando la oferta monetaria para un cierto periodo de tiempo de acuerdo con las circunstancias de la economía y apoyándose en un conjunto de indicadores.

Una de las principales razones por las cuales se ha abandonado la política monetaria discrecional es debido a los problemas de inconsistencia temporal, que se presentan cuando un banco central se compromete a seguir una cierta política monetaria, pero debe tomar decisiones desde una perspectiva pública para mejorar el bienestar social y abandona su compromiso con los objetivos propuestos, afectando las decisiones de los agentes económicos realizadas con otras previsiones. Así, en periodos de elecciones muchas autoridades económicas estarán tentadas a incrementar la oferta de dinero para conducir a un rápido crecimiento del producto; sin embargo, los agentes económicos ajustarán sus expectativas a un incremento mayor de los precios, dificultando el logro del objetivo de mantener una inflación baja y estable.

De esta forma, la discrecionalidad de las autoridades monetarias es potencialmente generadora de un cierto grado de confusión acerca de la prioridad dada a unas u otras variables en el proceso de toma de decisiones y la adherencia a una regla hará creíble el compromiso del banco central en la búsqueda de los objetivos finales de política, así mismo, la independencia del banco central garantiza a los agentes económicos el compromiso de las autoridades monetarias en mantener la inflación baja y estable.

De acuerdo con Taylor y Williams (2010, p. 3) con el uso de reglas se busca una política estable que evite la creación de shocks monetarios, que proteja a la economía de otras perturbaciones, y por lo tanto reduzca las posibilidades de recesión, depresión, crisis, deflación, inflación e hiperinflación. Así mismo, Taylor plantea que las reglas simples pueden mejorar la política evitando los excesos monetarios ya sea que estén causados por déficits en los mercados financieros, descubrimientos de materias primas, salidas de oro o por errores de los bancos centrales con demasiados objetivos de política. En este sentido, argumenta Taylor, las reglas corrigen una “política monetaria caótica” causada por la discreción de las autoridades monetarias o por eventos exógenos impredecibles como los nuevos descubrimientos de yacimientos de oro o su escasez.

4.2 Reglas de política monetaria

Actualmente la mayor parte de las economías ha abandonado la política monetaria discrecional y guían sus decisiones de política actuando de acuerdo con reglas flexibles que determinen las decisiones a tomar de acuerdo con las circunstancias económicas. El diseño de reglas de política monetaria estará vinculado con el objetivo de estabilidad de precios y es opuesto al manejo de políticas discrecionales.

De acuerdo con Taylor (2000) una regla de política monetaria es un plan contingente que especifica, lo más claramente posible, las circunstancias bajo las cuales un banco central debe modificar los instrumentos de política monetaria; Así mismo, McCallum (1997) define una regla de política como una fórmula que especifica los ajustes que deben ser hechos a un instrumento de política para mantener una variable objetivo cerca de su meta especificada.

Una regla de política monetaria servirá de guía a las autoridades monetarias para modificar un instrumento de política de acuerdo con la evolución de la

meta o valor fijado para unas variables objetivo. A través de la regla se establecerá el ajuste que las autoridades deben hacer al instrumento cuando los objetivos de política se desvíen de sus niveles deseados.⁵⁴ Una regla es considerada, entonces, como una estrategia que siguen las autoridades monetarias para mantener estables sus variables objetivo.

En cuanto al diseño de las reglas, se destaca que estas deben ser reglas simples, es decir, la modificación del instrumento de política debe responder a un pequeño conjunto de variables; esta característica hará que las reglas sean fácilmente comprensibles y que los objetivos de política monetaria sean bien entendidos por los agentes económicos, además, vincula a la autoridad monetaria con el cumplimiento tales objetivos. En este sentido, una regla de política monetaria se establece públicamente, de manera clara y anticipada por parte de los bancos centrales, anunciando un compromiso con unas pautas que guiarán sus decisiones en un plazo de tiempo determinado.

La capacidad de las reglas de política monetaria para estabilizar las fluctuaciones de las variables económicas frente a la discrecionalidad radica precisamente en que ellas especifican las acciones que deben seguir los bancos centrales para lograr sus objetivos macroeconómicos, reduciendo así la incertidumbre causada por acciones las discrecionales de las autoridades económicas; esto es, la economía trabajará mejor si los agentes económicos tienen una mayor certidumbre sobre la conducta de la política monetaria.

En general, existen dos tipos de reglas (Sachs y Larraín, 1994, p. 610): las reglas fijas, que especifican la política monetaria que debe seguir un banco central independientemente de las perturbaciones que afecten a la economía, y las reglas realimentadas, que permiten que la política monetaria se adapte a las perturbaciones económicas pero de acuerdo con lo establecido por la regla.

⁵⁴ Otros aportes a la definición de regla de política monetaria han sido hechos por Friedman (1959, 1968); Kydland y Prescott (1977); Barro y Gordon (1983), Svensson (1997, 1999).

4.2.1 Reglas fijas o en lazo abierto

Siguiendo a Buiter (1989, p. 77-78), en las reglas fijas (reglas sin realimentación o en lazo abierto) el policy maker especificará los valores actuales y futuros de los instrumentos de política al inicio del periodo de planificación. La trayectoria temporal de los instrumentos de política será función únicamente de la información disponible al inicio del periodo de planeación.

Formalmente, sea x_t el valor del vector instrumento en el periodo t , I_t el conjunto de información disponible para el policy maker al inicio del periodo t cuando x_t es elegido. $t = 1$ es el inicio del periodo de planeación y $t = T > 1$ es el final del periodo de planeación. Un plan o regla fija consiste en la elección, en $t = 1$, de un conjunto de funciones f_t , $t = 1, \dots, T$ o $\{f_t\}$ que relacione x_t , $t = 1, \dots, T$ con algún conjunto de información. Las políticas en lazo abierto o reglas fijas estarán definidas por:

$$x_t = f_t(I_1) \quad (t = 1, \dots, T) \quad [4.3]$$

De acuerdo con [4.3] una política en lazo abierto será implementada sin tener en cuenta ninguna nueva información que se acumule con el paso del tiempo.

La **regla de Friedman** es un ejemplo de regla fija que consiste en determinar una tasa de crecimiento constante del dinero independientemente de las condiciones iniciales, la estructura de la economía o shocks exógenos que afecten la economía. (Craine, R., Havenner, A., & Berry, J. 1978, p. 771).

Friedman señala que la inflación es siempre y en todo lugar un fenómeno monetario, es decir, que se produce cuando la cantidad de dinero en la economía aumenta de forma más rápida que la producción. Su regla monetaria recomienda que la oferta de dinero se incremente en un porcentaje fijo por periodo de tiempo (Friedman, 1959, 1968), esto es, la tasa de crecimiento monetario se debe mantener constante y acorde con la tasa de crecimiento de la producción.

El razonamiento de Friedman se basa en que las variables reales de la economía tienden, en el largo plazo, a una tasa natural que es independiente de la política monetaria. El banco central a través de la política monetaria puede influir en las variables reales en el corto plazo pero estos cambios se revierten y las variables tienden nuevamente a sus niveles naturales.

En opinión de Friedman, es mejor evitar los costos asociados a la desviación de las variables de sus niveles naturales limitando la discrecionalidad del banco central. La oferta monetaria puede crecer de acuerdo con una tasa predeterminada en cada periodo de tiempo y esta tasa no puede ser cambiada por el banco central. Sin embargo, la capacidad de la regla de Friedman para lograr la estabilidad en el corto plazo depende de la estabilidad de otras variables como la demanda de dinero.

4.2.2 Reglas flexibles o en lazo cerrado

De acuerdo con Buiter (1989, p. 77-78) una política en lazo cerrado especificará los valores de las variables de política en periodos actuales y futuros como funciones g_t , $t = 1, \dots, T$, o $\{g_t\}$, conociendo en $t = 1$ la información que estará disponible cuando estos valores de los instrumentos en realidad tengan los valores asignados (i.e. I_t para x_t), información que probablemente no esté disponible en el inicio del periodo de planificación cuando la regla g_t es escogida. Las políticas en lazo cerrado o reglas contingentes estarán entonces definidas por:

$$x_t = g_t(I_t) \quad (t = 1, \dots, T) \quad [4.4]$$

Las reglas flexibles (reglas contingentes, reglas condicionales, reglas realimentadas o en lazo cerrado) son superiores a las reglas fijas porque permiten que nueva información sea tomada en cuenta cuando se selecciona el curso actual de los instrumentos de política⁵⁵.

⁵⁵ Kydland y Prescott (1977) critican la efectividad de las reglas argumentando que aun cuando las políticas anticipadas tienen efectos reales, las reglas realimentadas (llamadas “políticas consistentes”

Siguiendo a McCallum (1997, p. 12), el modelo más simple de regla flexible podría ser:

$$r_t = r_{t-1} + \lambda(x_{t-1}^* - x_{t-1}) \quad [4.5]$$

con $\lambda < 0$, r_t el instrumento de política bajo control directo de la autoridad monetaria y x_t la variable de política objetivo.

La regla [4.5] especifica que el cambio en el instrumento r_t debe ser igual al cambio deseado en el equilibrio de estado estacionario r_{t-1} , más un ajuste en el término $\lambda(x_{t-1}^* - x_{t-1})$. Este último término muestra la respuesta de la autoridad monetaria a las desviaciones entre la variable objetivo x_t y su valor deseado x_t^* . El coeficiente λ muestra el grado de respuesta de la autoridad monetaria a las desviaciones entre x_t y x_t^* .

En general, las reglas realimentadas indican cómo debe responder el instrumento de política (i.e., la variable que está bajo el control directo del banco central) a las desviaciones de una variable de sus valores objetivo. Con la aplicación de reglas realimentadas en la política monetaria, los bancos centrales buscan corregir situaciones que conduzcan a la inestabilidad económica, como el crecimiento del producto o de la inflación por encima o por debajo de sus niveles de equilibrio deseados.

De acuerdo con Rennhack (1991, p.17), las reglas realimentadas guían las decisiones de las autoridades monetarias para que la economía regrese a un nivel de equilibrio cuando se producen perturbaciones inesperadas como variaciones en los precios mundiales del petróleo, variaciones en la demanda de inversión, etc. Por tanto, este tipo de reglas mejora el rendimiento económico puesto que se adapta a las variaciones de la economía pero actuando de acuerdo con la regla establecida.

por Kydland y Precott) serán subóptimas en modelos en los cuales el estado actual es una función de las expectativas racionales de estados futuros.

4.2.3 Regla de Taylor

La regla de Taylor (Taylor, 1993) está formulada como una regla que usa realimentación entre la tasa de interés monetaria de corto plazo y los objetivos de política; los bancos centrales ajustan el tipo de interés de corto plazo de acuerdo con la desviación de la tasa de inflación y el nivel de producción de sus valores objetivo:

$$i_t = r^* + \alpha(\pi_t - \pi^*) + \beta(Y_t - Y^*) \quad [4.6]$$

Donde:

i_t es la tasa de interés nominal de corto plazo.

r^* es la tasa de interés real de equilibrio.

π^* es la meta de inflación o inflación objetivo fijada por el banco central.

π_t es la tasa de inflación.

$(Y_t - Y^*)$ es el output gap o brecha de producción: desviación porcentual de la producción real Y_t de su nivel potencial Y^* .

α, β son parámetros positivos que miden la magnitud de la respuesta del instrumento de política monetaria i_t a la brecha de inflación $(\pi_t - \pi^*)$ y de producción $(Y_t - Y^*)$.

La regla de Taylor es una de las reglas más estudiadas y debatidas en la literatura sobre política monetaria⁵⁶ y corresponde a una norma muy específica que guía a las autoridades monetarias para la fijación de la tasa de interés de corto plazo. Es llamada Regla de Taylor en honor a John B. Taylor, economista y profesor de la U. de Stanford quien calculó esta regla de política monetaria usando la tasa de interés de los fondos federales de Estados Unidos para el periodo 1984-1992.⁵⁷

⁵⁶ Desde un punto de vista empírico, las investigaciones se dirigen a lograr una mejor caracterización de la política monetaria considerando la inclusión de nuevas variables o generalizando la forma funcional; desde una perspectiva teórica, las investigaciones se centran en la optimalidad de reglas de política alternativas. (Paez-Farrell; 2009)

⁵⁷ La investigación sobre el uso de reglas no es nueva en economía; podemos encontrar referencias al tema en Thornton (1802), Bagehot (1873), Wicksell (1898), Hayek (1931) Simon (1935), Friedman (1960), Kydland y Prescott (1977).

La regla ha sido objeto de mucha atención, ya sea porque describe adecuadamente la política monetaria seguida por Estados Unidos durante el periodo estudiado por Taylor sino también porque prescribe una política monetaria deseable. En este sentido la regla tiene un significado normativo adoptado por muchos países para la fijación de sus tasas de interés.

Taylor (2007, p. 9) explica que la regla se derivó de la teoría monetaria o, de manera más precisa de ejercicios de optimización usando los nuevos modelos dinámicos estocásticos monetarios con expectativas racionales y precios rígidos. No tiene la precisión de muchas reglas o leyes de la física, y no se creó para ser usada de forma mecánica. La regla de Taylor no debe considerarse como un instrumento con el cual los bancos centrales actúan de forma mecánica para lograr los objetivos últimos de la política monetaria sino como una guía de actuación en el proceso de toma de decisiones en la política monetaria. (Castañeda, 2004).

Muchos bancos centrales usan la regla de Taylor como parte de un régimen de “meta de inflación flexible” (*flexible inflation targeting*) que busca mantener tasas bajas y estables de inflación en el mediano plazo. La regla le informa a la autoridad monetaria cómo ajustar las tasas de interés de corto plazo en respuesta a cambios en las condiciones económicas, esto es, la autoridad monetaria modifica la tasa de interés cuando la inflación y la producción se desvían de sus objetivos.

La regla no especifica una meta para la oferta monetaria sino una meta para la tasa de interés de corto plazo que la autoridad monetaria fija en la realización de las operaciones de mercado abierto. En concreto, la regla recomienda que si el producto y la inflación exceden su objetivo, la autoridad monetaria debe elevar la tasa de interés nominal que hace que se incremente la tasa de interés real y por consiguiente se reduzca la demanda agregada. El proceso sería el siguiente: cuando la autoridad monetaria restringe la oferta monetaria, vendiendo valores en el mercado abierto, hace que se eleve el tipo de interés de los fondos prestables, es decir, del tipo al

que se prestan dinero los bancos; esto repercute en la economía elevando los costos asociados con la inversión y hace descender el gasto total de la economía (demanda agregada). El resultado es que esta acción hace descender los precios y el producto de sus niveles elevados.

Y si el producto y la tasa de inflación están por debajo de su objetivo, la regla de Taylor establece que una reducción del tipo de interés nominal reducirá el tipo de interés real y esto hará que se incremente la demanda agregada. En esta situación, la autoridad monetaria efectúa la acción contraria, es decir, pone dinero en los mercados de capitales, incrementando la oferta de fondos prestables lo cual hace descender la tasa de interés.

Por último, si la tasa de inflación es igual a su objetivo y el output gap es igual a cero, entonces la tasa de interés nominal de corto plazo será igual a la tasa de interés real de equilibrio.

Los coeficientes α y β indicarían las propiedades estabilizadoras de la regla. Taylor (2000) sostiene que una buena regla de política monetaria es aquella que consigue que las fluctuaciones de la inflación observada con respecto a la meta sean pequeñas.

En este sentido, la regla de Taylor contiene dos características importantes para estabilizar la inflación y el producto (Taylor y Williams, 2010, p. 11): primero, es el denominado *principio de Taylor* (Woodford, 2001, 2002) que indica que la tasa de interés nominal debe reaccionar positivamente y más que uno a uno ante movimientos en la tasa de inflación por encima de su objetivo ($\alpha > 1$) y positivamente ante movimientos de la producción por encima de su objetivo. De acuerdo con Woodford (2003), este sería un requisito necesario para la unicidad y estabilidad del punto de equilibrio⁵⁸.

⁵⁸ Cochrane (2007) resalta la incapacidad del principio de Taylor en el contexto de los modelos del nuevo Keynesianismo para determinar la inflación o el nivel de precios puesto que nada en economía lleva a descartar la existencia de equilibrios diferentes a los locales o acotados; los equilibrios no locales o explosivos son equilibrios válidos y estos equilibrios simplemente son descartarlos por los teóricos del nuevo Keynesianismo. Sargent y Wallace (1975) asocian indeterminación a equilibrios múltiples, como los que se presentan en sistemas dinámicos no

De acuerdo con Bullard, J., & Mitra, K. (2002), la idea que subyace en la regla de Taylor es que un alza en la inflación conlleva un alza en la tasa de interés real que reduce la demanda y las presiones inflacionarias haciendo que la economía regrese a su meta de equilibrio. Así, una regla que no sigue el principio de Taylor ($\alpha < 1$), conlleva a que el incremento en la tasa de interés nominal de corto plazo, i_t , no sea suficiente para inducir un alza en la tasa de interés real, r^* , aumentando las presiones inflacionarias y alejando a la economía de su nivel de equilibrio. Cuando ($\alpha > 1$) la regla lleva a la inflación hacia su valor de equilibrio, actuando como un mecanismo automático de estabilización.

Segundo, la regla es *"leans against the wind"*, es decir, eleva la tasa de interés en cierta cantidad cuando la producción está por encima de su nivel potencial y la disminuye en la misma cantidad cuando la producción está por debajo de su nivel potencial. Así, una ventaja de la regla de Taylor es que es muy específica en la guía de la autoridad monetaria para ajustar las tasas de interés de corto plazo en respuesta a las desviaciones de la producción y la inflación de sus valores objetivo.

De esta forma, se puede decir que la gestión actual de la política monetaria queda sintetizada en la regla de Taylor con la cual las autoridades monetarias determinarían un tipo de interés nominal que sea compatible con dos objetivos importantes de política económica: la estabilización de la producción en el corto plazo y el control de la inflación en el largo plazo.

Esta regla, a diferencia de las reglas rígidas, permite a las autoridades monetarias tener algún grado de discrecionalidad para reorientar la política monetaria ante imprevistos. En este sentido, la regla de Taylor se convierte en una regla operativa de comportamiento y no en una norma explícita de vinculación. (Erias, J., & Sánchez, J.M. 1998).

lineales. Así, el principio de Taylor solo puede determinar la inflación si el único equilibrio existente es el local o acotado.

De acuerdo con Díaz Roldán, C., & Montero Soler, A. (2004), las modificaciones a la regla mantienen la fidelidad a la estructura propuesta por Taylor. Entre estas modificaciones están:

(i) *Interest rate smoothing.*

Este tipo de especificación incorpora una variable (ρ), que recoge la forma de fijación de la tasa de interés nominal de corto plazo: un ajuste gradual (smooth) evitará que i_t se modifique de forma brusca y pueda generar inestabilidad e incertidumbre en los mercados financieros.

$$i_t = \rho i_{t-1} + (1 - \rho)r^* + \alpha(\pi_t - \pi^*) + \beta(Y_t - Y^*) \quad [4.7]$$

De acuerdo con [4.7] la tasa actual de interés nominal de corto plazo, i_t , está determinada por la tasa de interés retardada i_{t-1} , la tasa de interés real de equilibrio r^* , la tasa de inflación π_t , la tasa de inflación objetivo, π^* , y el output gap ($Y_t - Y^*$). El parámetro ρ mide el grado de ajuste gradual en la fijación de i_t en el periodo anterior. Cuando $\rho = 0$, nos encontraríamos con la especificación de la regla de Taylor original.

(ii) *Backward looking.*

Esta especificación y la siguiente tienen en cuenta el proceso de formación de las expectativas sobre la inflación y el *output gap*. Aquí, las expectativas se aproximan mediante valores retardados de las variables, teniendo en cuenta la evolución pasada de las mismas.

$$i_t = r^* + \alpha(\pi_{t-1} - \pi^*) + \beta(Y_{t-1} - Y^*) \quad [4.8]$$

(iii) *Forward Looking* (Clarida, Galí y Gertler, 1998, 2000).

Bajo esta regla la política monetaria responde a la inflación esperada. Las autoridades fijan la tasa de interés en respuesta a las previsiones de las desviaciones de la inflación y la producción de sus objetivos, usando la información de periodos pasados:

$$i_t = r^* + \alpha(E_t[\pi_{t+1} - \pi^*]) + \beta(E_t[Y_{t+1} - Y^*]) \quad [4.9]$$

Entre los trabajos que han analizado a nivel teórico y empírico la política monetaria de diferentes países caracterizada mediante la regla de Taylor o alguna de sus versiones están: Díaz Roldán, C., & Montero Soler, A (2004); Svensson, L. (1997); Ball (1999); Judd & Rudebusch (1998); Clarida, Galí & Gertler (1998, 2000); Batini & Haldane (1999); Nelson (2000); Gerlach & Schnabel (2000), entre otros.

La capacidad de la regla de Taylor o de sus variantes para estabilizar la inflación y la producción alrededor de unos valores de equilibrio, ha llevado a muchos países a adoptarla como norma de conducción de la política monetaria. Sin embargo, la regla de Taylor carece de una fundamentación teórica ya que ha sido desarrollada de forma empírica para dar una guía a los bancos centrales sobre la fijación de la tasa de interés. En este sentido, Cochrane (2007, p. 3) afirma que “la famosa ‘regla’ de Taylor (1993) fue en realidad una observación empírica sobre el comportamiento de los bancos centrales, y solo después, cuando se combina con los modelos del nuevo Keynesianismo se convierte en una teoría de determinación de la inflación”.

Las reglas de control, provenientes de la teoría del control, suponen el sustento teórico de la regla de Taylor en la medida en que estabilicen una variable en sus valores fijados como objetivo haciendo ajustes sobre un parámetro de control. En efecto, en esta tesis defendemos que las reglas sencillas tipo Taylor [4.6] y sus variantes tienen un sustento teórico en la teoría del control, ya que adoptan formalmente la misma formulación que la propuesta por esta teoría moderna del control de sistemas caóticos en lazo cerrado como la expuesta en el capítulo anterior (ecuación [3.22]). Y que por tanto podría utilizarse dicha teoría del control para profundizar en este tipo de reglas de control aplicadas a la política monetaria.

4.3 Reglas de control en política monetaria y estabilización macroeconómica

Por inestabilidad económica se puede entender las fluctuaciones o desequilibrios que presentan las distintas variables económicas, y por política de estabilización se entenderá aquellas políticas que tratan de eliminar o suavizar estas fluctuaciones no deseadas. La inestabilidad de un sistema económico puede estar causada por factores exógenos o endógenos al sistema. Los estudios sobre dinámica caótica en economía dan una explicación endógena a la presencia de ciclos resaltando que estos factores endógenos subyacen a la dinámica del sistema.

De acuerdo con Barnett y He (2002, p. 713-714) el concepto de “política de estabilización” implícitamente asume que la macroeconomía es inestable sin la aplicación de una política. Así, por política de estabilización se puede entender la elección de una política que bifurque la economía desde un régimen de operación inestable a uno estable moviendo los parámetros desde un punto en el cual las soluciones son inestables a uno en el cual son estables.

En efecto, los sistemas dinámicos caóticos pueden estabilizarse en el largo plazo en diferentes equilibrios dinámicos llamados atractores, estos pueden ser de tipo punto fijo donde la dinámica del sistema permanece en estado estacionario, o ciclo limite donde oscila de forma periódica o atractores toro donde oscila de forma aperiódica, finalmente se pueden estabilizar en un atractor extraño donde el sistema oscilará de forma irregular. A diferencia de los sistemas lineales, donde el único equilibrio posible es un atractor de punto fijo, los sistemas no lineales se podrán estabilizar en cualquier equilibrio dinámico. De acuerdo con estos diferentes comportamientos, una política de estabilización se podría definir como la selección de un valor para el parámetro de control que lleve a la economía de un equilibrio dinámico irregular a uno estacionario.

Los sistemas dinámicos caóticos presentan fluctuaciones irregulares cuando se estabilizan en un atractor extraño y esta irregularidad no es causada por factores exógenos al sistema sino por la realimentación no lineal de las variables del sistema, es decir, por factores endógenos. La teoría del control del caos propone métodos para tratar de suprimir este comportamiento caótico haciendo que la trayectoria que recorre de manera irregular cada uno de los estados de equilibrio dinámico inestables que se encuentran dentro del atractor, se estabilice en uno de ellos y permanezca allí.

La aplicación de métodos de control del caos a sistemas dinámicos económicos (lineales y no lineales) hará necesario la representación de dichos modelos en el espacio de estados. En general, la especificación de un modelo económico en el espacio de estados empleará dos tipos de variables: las variables de estado y las variables de control. Las variables de estado (que corresponden a las variables exógenas de los modelos económicos) describen el estado de la economía pero no pueden ser alteradas por los responsables de política o *policy makers*; las variables de control (instrumentos de política) si pueden ser modificadas directamente para afectar el comportamiento de las variables de estado y llevar a la economía al comportamiento planeado por las autoridades económicas⁵⁹. En economía, a través de la política de estabilización buscamos regular o controlar variables exógenas como el tipo de interés o la cantidad de dinero para que las variables objetivo (x) (inflación, desempleo, producción, etc) se acerquen al valor deseado o predeterminado (x^*). Así, en el contexto de la dinámica caótica, aplicar una política de estabilización significará mover la economía a un equilibrio dinámico deseado.

Aplicando los métodos de control del caos a los modelos económicos buscamos llevar, entonces, a la economía de un equilibrio dinámico inestable a uno estable a través de la aplicación de reglas de política que actúan de forma similar a las reglas de control empleadas por los métodos

⁵⁹ Esta es la definición de control, aplicada a la economía, que hemos dado en el capítulo 3.

de control del caos. En efecto, y retomando la definición McCallum (1997, p. 12)

$$r_t = r_{t-1} + \lambda(x_{t-1}^* - x_{t-1}) \quad [4.5]$$

Podemos aplicar el concepto de control: en general, un sistema de control buscará que una **variable controlada** x , tome un **valor deseado** x^* , por medio de ajustes en el valor de otra variable llamada **variable de control** r .

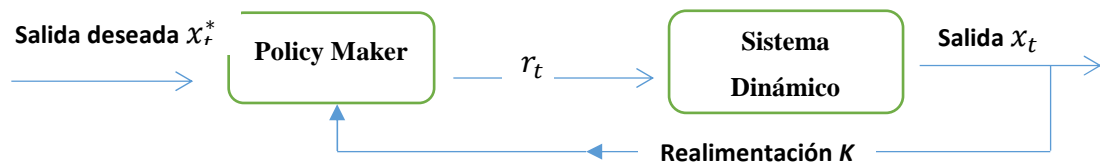


Figura 4.1. Sistema de realimentación negativa en una regla de política monetaria.

Con la aplicación de la regla [4.7], el policy maker buscará que la variable controlada x_t tome un valor deseado x_t^* ajustando la variable de control r_t : el instrumento r_t debe reducirse (elevarse) si la variable objetivo x_t se encuentra por debajo (encima) de su valor objetivo x_t^* en el período anterior.

La capacidad de estabilización de las reglas flexibles de política, tal como lo ha demostrado la regla de Taylor, se debe a que son reglas realimentadas y la realimentación tiene un papel decisivo en los procesos de estabilización ya que actúa regulando la interacción entre dos variables cuya actividad está vinculada⁶⁰ (Briggs, J., & Peat, F, 1989, p.24-26). La realimentación negativa controla los efectos de una variable sobre la otra, mientras que la realimentación positiva los amplifica. Un ejemplo de realimentación positiva lo constituye una espiral inflacionista en la cual el aumento de los precios lleva a un aumento en los salarios de los trabajadores que a la vez eleva los precios, etc.

⁶⁰ Por ejemplo, el termostato de la calefacción regula la actividad entre la temperatura deseada en una habitación y la cantidad de calor que este debe emitir.

La realimentación negativa es aplicada en economía bajo el nombre de estabilizadores automáticos (Kendrick, 1988) entendiéndose por estos las acciones económicas que corrigen desequilibrios del mercado sin la intervención del gobierno, las empresas o los individuos. Los estabilizadores automáticos actúan contrarrestando las fluctuaciones cíclicas de la economía, por ejemplo, el seguro de desempleo, el gasto público o la variación de los impuestos equilibran las fases expansivas y recesivas de la economía.

La aplicación de la política monetaria actualmente, puede ser vista como la solución de un problema de control, en donde el policy maker tiene como objetivo de control la estabilización (o regulación) de la inflación y la producción alrededor de unos valores de equilibrio:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \pi(t) = \pi^* \quad [4.10]$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = Y^* \quad [4.11]$$

Con el objetivo de estabilización las autoridades monetarias buscarán que las variables inflación y producción de un sistema dinámico económico sean estabilizados alrededor de sus punto de equilibrio, es decir, se busca conducir las soluciones $\pi(t)$ e $Y(t)$ del sistema a sus equilibrios π^* e Y^* . El logro de este objetivo de control implicará el diseño de una ley de control en lazo cerrado de la forma:

$$i(t) = -K_1\pi_t - K_2Y_t \quad [4.12]$$

Como se mencionó con anterioridad, la regla de Taylor ha sido implementada en muchos países dentro de un régimen de control directo de la inflación debido a su capacidad para estabilizar la inflación y la producción alrededor de unos valores de equilibrio:

$$i_t = r^* + \alpha(\pi_t - \pi^*) + \beta(Y_t - Y^*) \quad [4.6]$$

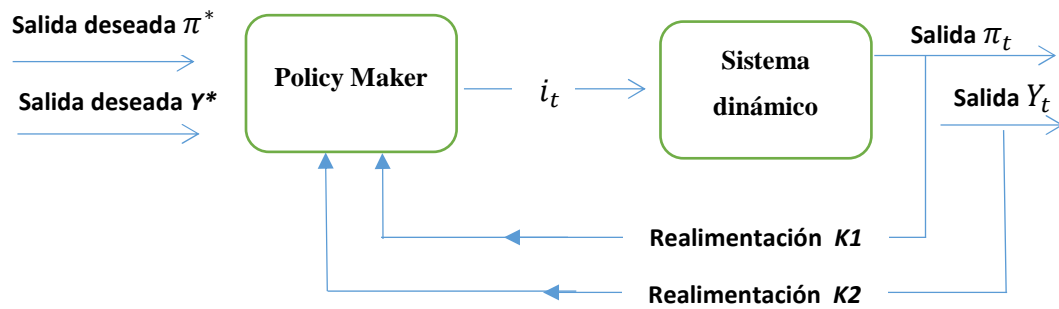


Figura 4.2. Sistema de realimentación negativa en la regla de Taylor.

Con la aplicación de la regla de Taylor [4.6] el policy maker buscará que las variables controladas π_t e Y_t se aproximen a un valor deseado π^* e Y^* ajustando el instrumento de control i_t . En política monetaria este concepto de control será traducido como el ajuste que deben hacer los bancos centrales sobre el tipo de interés de corto plazo para que la tasa de inflación y el nivel de producción se aproximen a sus valores objetivo.

Los primeros intentos de aplicación de técnicas desarrolladas por la teoría del control a sistemas dinámicos económicos se encuentran en los trabajos de Tustin, A. (1953), Phillips, A. (1954), Allen, R. (1967). Timbergen, J. (1952, 1956) da las condiciones de controlabilidad para un sistema económico; Acocella, N., Di Bartolomeo, G., & Hughes, A. (2007) y Acocella, N., & Di Bartolomeo, G. (2008) y aportan un tratamiento reciente a los problemas de controlabilidad en economía. Otras aplicaciones de control a sistemas económicos las encontramos en Brito, D., & Hester, D. (1974), Aoki, M., & Canzoneri, M. (1979), Barbolla, R., & Gómez, J. (1987), Judd, J., & Motley, B. (1992), Maas, W., & Nijmeijer, H. (1994), Barnett, W., & He, Y. (2002).

Entre las contribuciones que aplican las técnicas de control del caos a modelos no lineales de dinámica económica están Holyst, J., Hagel, T., Haag, G. & Weidlich, W. (1996); Holyst, J., Hagel, T. & Haag, G. (1997); Holyst, J., & Urbanowicz, K. (2000); Holyst, J., Zebrowska, M., & Urbanowicz, K. (2001); Ahmed, E., El-misieri, A., & Agiza, H. (1999); Ahmed, E., & Hassan, S. (2000); Chen, L., & Chen, G. (2007); Salarich, H., & Alasty,

A. (2009); Haag, G., Hagel, T., & Sigg, T. (1997), usan técnicas de control para estabilizar sistemas económicos urbanos. Kaas, L. (1998), Bala, V., Majumdar, M., & Mitra, T. (1998) y Kopel, M. (1997) han aplicado los métodos de control a modelos de desequilibrios dinámicos. Mendes, V., & Mendes, D. (2008) aplican el método OGY en un modelo de ciclo endógeno de generaciones solapadas. Finalmente, Wieland, C., & Westerhoff, F. (2005) muestran cómo utilizar diferentes métodos de control (incluido el OGY) para estabilizar la evolución de los tipos de cambio.

CAPÍTULO 5

EL CONTROL DE SISTEMAS DINÁMICOS CAÓTICOS EN ECONOMÍA

En este capítulo vamos a mostrar cómo se aplican las técnicas de control al caos presentadas en los capítulos anteriores a modelos o sistemas dinámicos en Economía. No se trata en este capítulo de defender ningún modelo teórico particular como el que mejor describe el comportamiento dinámico de las economías reales. Por el contrario, el objetivo es mostrar que las técnicas de control pueden aplicarse también a los modelos económicos, independientemente de sus supuestos doctrinales que incorpore.

Nos centraremos en modelos monetarios, modelos en donde hay cabida para la existencia de una política monetaria estabilizadora. Esto es, analizaremos una serie de modelos en los que se incluye el papel de la oferta monetaria como un factor exógeno a la dinámica de la economía. Ello implica que asumimos que dicha oferta monetaria es controlable o regulable por las autoridades monetarias, que pueden utilizar esa oferta monetaria como instrumento de control de todo el sistema a través de la política monetaria.

Las técnicas del control del caos se utilizan para estabilizar equilibrios estacionarios aunque dichos equilibrios sean inestables. Dicho control se realiza mediante la utilización de estabilizadores automáticos. Es decir, que frente la intervención discrecional, en esta tesis mostramos cómo pueden diseñarse reglas de política monetaria para estabilizar determinados puntos fijos que se consideran objetivos para la política monetaria. El objetivo, por tanto de este capítulo es el de presentar las técnicas para deducir reglas de

control monetario que estabilicen la evolución de diferentes variables endógenas que se consideren objetivos de la política monetaria, básicamente inflación y desempleo, que son las dos variables que tradicionalmente se consideran los objetivos prioritarios de la política monetaria.

Las reglas de control o de actuación de las autoridades monetarias que se obtienen son de la forma⁶¹:

$$\dot{M}_t = \bar{M} + k_1(\dot{P}_t - \bar{P}) + k_2(u_t - \bar{u}), \text{ en un entorno de } \bar{P} \text{ y } \bar{u}$$

siendo \dot{M}_t el crecimiento de la oferta monetaria en el instante t , \dot{P}_t la inflación en el instante t , u_t la tasa de paro en el instante t , \bar{M} la tasa de crecimiento de la oferta monetaria fija en ausencia de intervención (es decir, cuando no se activa la regla de control), y, \bar{P} y \bar{u} son los puntos fijos, de inflación y paro que se quieren alcanzar y estabilizar mediante la intervención de las autoridades monetarias.

Nótese que estas reglas de control tienen una apariencia similar a las reglas de política monetaria mediante estabilizadores automáticos que establecen que la intervención debe ser proporcional a las desviaciones entre el valor real de las variables objetivo en cada instante respecto a los valores deseados. Es decir, de nuevo reaparecen de alguna forma las *funciones de pérdida social* utilizadas ya a finales de la década de los 50 en los modelos de decisión de la política económica con las primeras formulaciones matemáticas del problema de decisión de Henri Theil (1958)⁶². Esta forma de las reglas de control nos recuerdan a su vez a las reglas de política

⁶¹ Aquí seguiremos con la tradición de los modelos monetarios que tratan a la oferta monetaria como el instrumento de control de las autoridades Monetarias. Existen otras aportaciones en las que las reglas se trasladan hacia el tipo de interés nominal considerando que son éstos los que son considerados por las autoridades monetarias como verdaderos instrumentos de intervención de la política monetaria. Ambos modelos pueden relacionarse a través del mercado de dinero con una demanda de saldos reales dependiente de los tipos de interés. En este caso, cuando el instrumento de política monetaria es el tipo de interés, entonces la oferta de dinero se determina endógenamente en el mercado monetario para que el equilibrio entre demanda y oferta de dinero coincida precisamente con el tipo de interés establecido por las reglas de política. Sobre la relación entre Reglas Monetarias basadas en tipos de interés o en oferta monetaria véase Walsh (2000, cap 5, 9 y 10)

⁶² Véase Fernandez Díaz et al. (1999, cap 5) y Blanchard y Ficher (1989, cap 11)

monetaria tipo Taylor (1993)⁶³, por lo que no podemos decir que sean totalmente novedosas, ya que de una u otra forma son bien conocidas ya en la literatura sobre la política económica. La principal aportación de las técnicas de control del caos que presentamos en esta tesis y que aplicamos en este capítulo, es la de proporcionar el método, fundamentado en la Teoría del Control de sistemas dinámicos caóticos iniciada por Ott, Gerbogi y Yorke (1990) y que ha sido analizada en el capítulo 3 de la presente tesis doctoral, para deducir de manera óptima los valores de k_1 y k_2 que determinan a la postre la intensidad y el sentido de la intervención de la política monetaria.

No consideraremos en esta ocasión el problema de la incertidumbre, ni de los retardos temporales, ni de los problemas derivados de la falta de credibilidad y reputación de las autoridades monetarias. Esta simplificación de los supuestos incorporados en los modelos que vamos a utilizar a continuación se debe simplemente a la búsqueda de la claridad en la exposición de lo que entendemos que es nuestra verdadera aportación: el diseño y deducción de reglas de política monetaria que establezcan equilibrios dinámicos que serían inestables en ausencia de control o regulación por parte de los *policy makers*.

Una vez presentadas estas técnicas, podrán aplicarse a cualquier otro modelo que represente la dinámica económica, independientemente de que el control se realice mediante la oferta monetaria o mediante cualquier otro instrumento de intervención directamente regulado por la política económica.

El único requisito que se exige a esos modelos para ser controlables es que sean modelos realmente dinámicos, esto es, que exista retroalimentación temporal entre sus variables de estado, y que la relación entre dichas

⁶³ Como ya se mostró en el capítulo 4 las reglas de Taylor establecen una ecuación para la determinación del tipo de interés por parte de las autoridades monetarias del tipo $i_t = b_y y_t + b_\pi \pi_t$, siendo i_t el tipo de interés nominal, y_t el nivel de producción agregada y π_t la tasa de inflación. Taylor (1993) mostró que una sencilla regla como esta (con $b_y = 0.5$ y $b_\pi = 1.5$) describían sorprendentemente bien las políticas de la Reserva Federal Norteamericana de la década de los 80 y principios de los 90. Clarida, Galí y Gertler (1998) estimaron diferentes versiones de esta regla del tipo de interés para Estados Unidos, Reino Unido, Francia, Alemania e Italia.

variables mediante la que se establece el movimiento del sistema sea, al menos, no lineal. De esta forma los resultados del control de estos sistemas permitirán evidenciar la transición desde equilibrios localmente inestables, por ejemplo sistemas caóticos, hacia los estados estacionarios considerados como los objetivos de las autoridades económicas encargadas del diseño de las reglas de control.

5.1. Control en el modelo de inflación de Futoma y Southworth (2011)

El primero de los modelos que consideramos en este capítulo es el elaborado por Futoma y Southworth (2011) que identifican y analizan las fluctuaciones endógenas en una economía monetaria a partir del modelo propuesto inicialmente por Matsuyama (1991). Los autores examinan cómo las fuerzas internas en una economía monetaria son capaces de producir variaciones caóticas de la inflación y muestran que, para valores específicos de algunos parámetros, el modelo puede reescribirse como la bien conocida como aplicación logística y por tanto puede estabilizarse su comportamiento caótico mediante las técnicas de control tal y como se mostró en el capítulo anterior.

Supuestos del modelo:

- (i) Existe un agente representativo con un horizonte de vida infinito y la capacidad de predecir perfectamente los precios futuros.
- (ii) El agente maximiza su utilidad (una medida de satisfacción del consumo); es decir, el agente deriva su satisfacción del consumo de bienes y de poseer dinero.
- (iii) La función de utilidad del agente estará dada por la función de consumo y de saldos reales. Los saldos reales son la cantidad actual de dinero que el agente posee, ajustados por la inflación.

5.1.1 Derivación del modelo

Una hipótesis fundamental del modelo es que el agente maximizará su utilidad total. Sin embargo, como se asume que el agente tiene un horizonte de vida infinito, tendrá una función de utilidad para cada uno del número infinito de periodos que vive. El agente maximiza la suma de su utilidad sobre todos los periodos:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c(t), m(t))$$

Su utilidad U en el periodo actual, t , se expresa como una función de su consumo actual, $c(t)$, y de sus saldos reales, $m(t)$. $\beta \in (0,1)$ es un parámetro de descuento de utilidad del agente en los periodos futuros. Esto es, β mide qué tanto preocupa al agente su utilidad futura comparada con su utilidad presente.

El agente tiene algunas restricciones en su consumo y en sus saldos reales. La restricción presupuestaria del agente, dada una cantidad inicial de dinero $M_0 = M(0)$:

$$M(t) = P(t)(y - c(t)) + H(t) + M(t - 1)$$

La ecuación expresa el presupuesto limitado del agente en el periodo t . El parámetro y que representa la dotación de bienes de consumo perecedero, describe un nivel contante de consumo de bienes dado para el agente. $M(t)$ representa el dinero nominal del agente en el periodo t , es decir, la cantidad de dinero que tiene el agente sin ajustar la inflación. $M(t)$ se relaciona con los saldos reales así:

$$m(t) = \frac{M(t)}{P(t)}$$

Donde $P(t)$ representa el nivel actual de precios. El agente considera el nivel de precios durante cada periodo $\{P(t)\}_{t=0}^{\infty}$, de forma independiente a su tenencia de dinero, con lo cual $P(t)$ nunca depende de $M(t)$ o $m(t)$. Además, al comienzo de cada periodo t , el agente recibe papel moneda del gobierno $H(t)$, suceso que es independiente de la tenencia previa de dinero

del agente. $H(t)$ representa así, el “helicopter drop” de dinero del agente en cada periodo.

La oferta de dinero en la economía crece a una tasa μ , con $\mu > \beta$. Por la definición de μ tenemos que $M(t) = \mu M(t-1)$. $H(t)$ se puede expresar como la diferencia en la tenencia de saldos nominales entre los periodos $t-1$ y t ; usando la anterior ecuación se puede obtener:

$$H(t) = (\mu - 1)M(t-1)$$

Entonces, el mercado se vacía cuando:

$$M(t) = \mu^t M_0, \quad c(t) = y \quad \forall t$$

El punto de equilibrio de esta economía está dado por una secuencia no negativa de saldos reales que satisface:

$$\beta U_c(y, m(t+1))m(t+1) = \mu m(t)[U_c(y, m(t)) - U_m(y, m(t))] \quad [5.1]$$

Donde U_c y U_m denotan las respectivas derivadas parciales de U . La condición de transversalidad que debe satisfacer el punto de equilibrio es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t U_c(y, m(t))m(t) = 0$$

El estado estacionario del sistema está dado por $m(t) = m^*$. Sin embargo, como también tenemos que $M(t) = \mu^t M_0$ y $m(t) = M(t)/P(t)$, el estado estacionario se puede reescribir como:

$$P(t) = \mu^t \frac{M_0}{m^*} \quad \forall t$$

Notese que $m^* > 0$, m^* debe ser el único estado estacionario, además m^* satisface:

$$(\mu - \beta)U_c(y, m^*) = \mu U_m(y, m^*)$$

La anterior expresión está obtenida sustituyendo $m(t+1) = m(t) = m^*$ en la ecuación [5.1]. Siguiendo a Matsuyama, hacen la hipótesis simplificadora de que la función de utilidad tiene la forma:

$$U(c, m) = \begin{cases} -\frac{[g(c)m]^{-(1+\eta)}}{1+\eta} & \text{para } \eta \neq 1 \\ \log g(c) + \log(m) & \text{en otro caso} \end{cases} \quad [5.2]$$

Donde g es alguna función arbitraria de c que satisface $g > 0$, $g' > 0$, y

$$\sup \left[\frac{gg''}{g'^2} \right] < 1$$

Adicionalmente, η es un parámetro que satisface:

$$(\eta + 2) \left[2 - \sup \left(\frac{gg''}{g'^2} \right) \right] > 1$$

El parámetro η relaciona la elasticidad de sustitución intertemporal de saldos reales, σ , a través de:

$$\sigma = (\eta + 2)^{-1}$$

La elasticidad de sustitución intertemporal de saldos reales describe la sensibilidad de la tasa de crecimiento de los saldos reales a la tasa de interés, o la tasa de interés que un inversor espera recibir una vez descontada la inflación.

Sustituyendo la ecuación [5.2] en [5.1] tenemos:

$$p(t+1) = (1+\delta)^{\frac{1}{\eta}} p(t) (1-p(t))^{\frac{1}{\eta}} \equiv F(p(t)) \quad \forall t \quad [5.3]$$

El nuevo parámetro δ está definido por:

$$\delta \equiv \frac{\mu}{\beta} - 1 > 0$$

La nueva variable $p(t)$ está definida por:

$$p(t) \equiv \frac{g(y)}{g'(y)m(t)}, \quad p(t) \in (0,1)$$

Para la variable p la condición de transversalidad es:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t p^\eta(t) = 0$$

El estado estacionario en términos del nuevo parámetro es:

$$p^* = \frac{\delta}{1+\delta}$$

Los autores descartan el caso $\eta = 0$ por simplicidad. El caso especial donde $\eta = 1$ es un caso conocido ya que sustituyendo $\eta = 1$ en [5.3] tenemos la conocida aplicación logística:

$$F(p(t)) = (1+\delta)p(t)(1-p(t)), \quad p(t) \in (0,1) \quad [5.4]$$

5.1.2 Comportamiento dinámico del sistema

El mapa logístico [5.4] contiene soluciones periódicas, aperiódicas y caóticas para los precios, como se puede observar en el gráfico de bifurcación:

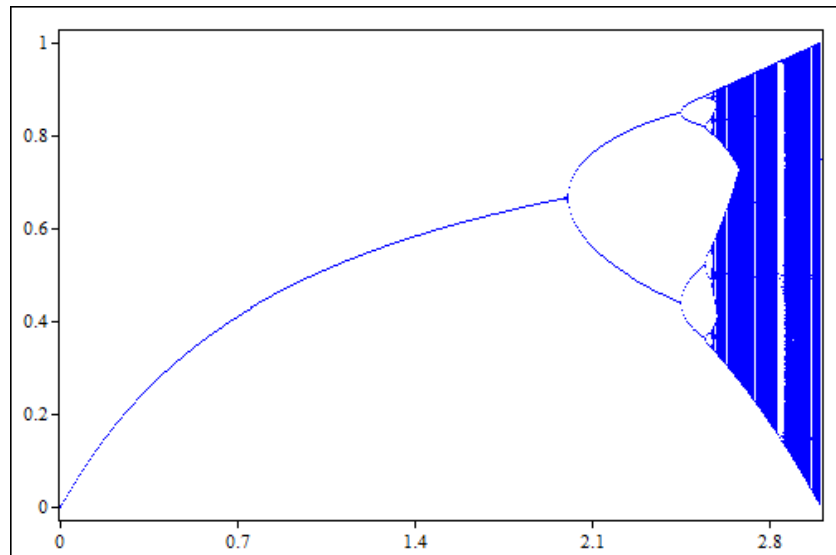


Figura 5.1. Gráfico de bifurcación: $p(t+1) = (1+\delta)p(t)(1-p(t))$, $p(t) \in (0,1)$, $\delta \in (0,3)$.

El gráfico de bifurcación muestra que para valores lo suficientemente grandes de δ , el modelo exhibe caos. El valor $\delta \equiv \frac{\mu}{\beta} - 1 > 0$, implica que los precios mostrarán caos para valores grandes de μ (tasa de crecimiento de la oferta de dinero) y/o para valores pequeños de β (factor de descuento de la utilidad futura).

Entonces, si la oferta de dinero crece a una tasa muy alta y/o el agente descuenta rigurosamente su utilidad futura, los precios mostrarán caos. Una tasa muy alta de crecimiento de la oferta monetaria en una economía puede causar que la economía exhiba comportamiento caótico, aún en ausencia de fuerzas externas.

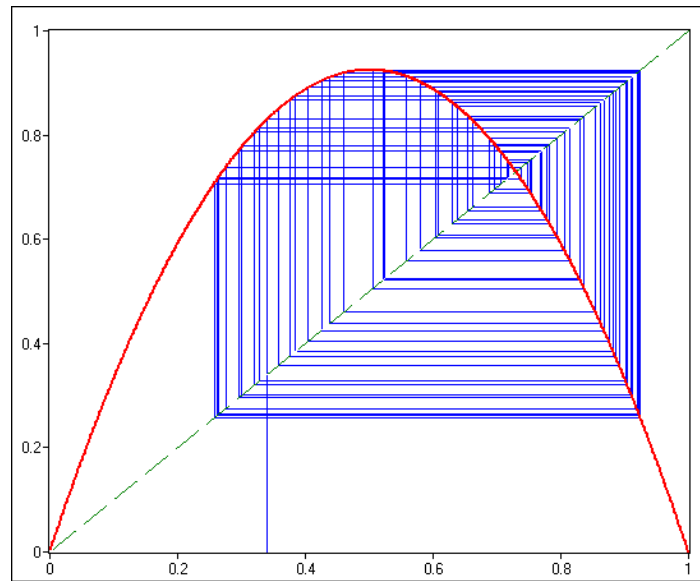


Figura 5.2. Diagrama de fases: $p(t + 1) = (1 + 2.7)p(t)(1 - p(t))$

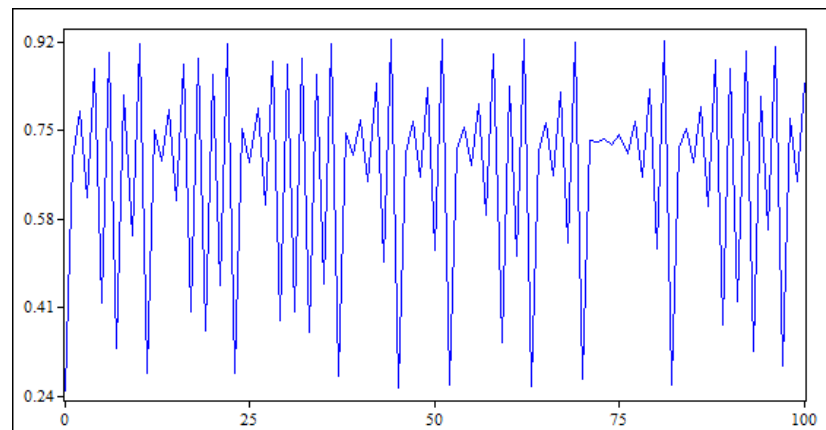


Figura 5.3. Trayectoria temporal caótica de los precios. $p(t + 1) = (1 + 2.7)p(t)(1 - p(t))$.

5.1.3 La regla de control en el modelo monetario de Futoma y Southworth (2011)

A continuación se estabilizará una trayectoria caótica del modelo de fluctuaciones endógenas de precios [5.4] en una órbita de periodo uno, es decir, en un punto fijo.

Consideremos el caso en el que $\bar{\delta} = 2.7$, valor del parámetro para el cual los precios muestran fluctuaciones caóticas. El punto fijo de la aplicación logística [5.4], $p^* = \bar{\delta}/(1 + \bar{\delta}) = 0.7297$, será inestable. Vamos a continuación a estabilizar este punto fijo aplicando las técnicas de control del caos desarrolladas en el capítulo anterior, para que a pesar de ser inestable consigamos permanecer en dicho punto fijo.

El parámetro δ será regulado dentro de un pequeño rango alrededor del valor nominal $[(1 + \bar{\delta}) - \Delta_{max}, (1 + \bar{\delta}) + \Delta_{max}]$, esto es, $[3.7 - \Delta_{max}, 3.7 + \Delta_{max}]$ con $\delta \ll 1$. La perturbación máxima elegida es $\Delta_{max} = 0.005$. Como el movimiento dentro de un atractor caótico es ergódico, una trayectoria con condición inicial arbitraria p_0 , y con probabilidad unitaria, pasará cerca de la vecindad de la órbita periódica elegida p^*

Para derivar la regla de control óptima debemos en primer lugar derivar la dinámica de [5.4] $p(t + 1) = (1 + \delta)p(t)(1 - p(t))$ en torno al punto fijo que se desea estabilizar $(p^*, \bar{\delta}) = (0.7297, 2.7)$. Esta linealización vendrá dada por:

$$p(t + 1) - p^* = \left. \frac{\partial f(p, \delta)}{\partial p} \right|_{p=p^*, \delta=\bar{\delta}} [p(t) - p^*] + \left. \frac{\partial f(p, \delta)}{\partial \delta} \right|_{p=p^*, \delta=\bar{\delta}} [\delta(t) - \bar{\delta}] \quad [5.5]$$

con

- $\left. \frac{\partial f(p, \delta)}{\partial p} \right|_{p=p^*, \delta=\bar{\delta}} = -p^*(1 - \bar{\delta}) - (1 + \bar{\delta})(p^* - 1) = -1.6998$
- $\left. \frac{\partial f(p, \delta)}{\partial \delta} \right|_{p=p^*, \delta=\bar{\delta}} = -p^*(p^* - 1) = 0.1972$

La regla de control se define sobre el parámetro δ cuando $p(t) \neq p^*$:

$$\Delta\delta(t) = [\delta(t) - \bar{\delta}] = -K[p(t) - p^*] \quad [5.6]$$

Sustituyendo [5.6] en [5.5] obtenemos el siguiente sistema dinámico con control que nos servirá para determinar el valor de K en nuestra regla de control [5.5]:

$$p(t+1) - p^* = (-1.6998 - 0.1972 * K) [p(t) - p^*] \quad [5.7]$$

Para obtener el valor de K que permite estabilizar el punto fijo p^* requeriremos que esta nueva aplicación [5.7] sea estable. Al tratarse de una aplicación lineal, cualquier valor de K que haga que $|-1.6998 - 0.1972 * K| < 1$ sería válido. Una de estas posibilidades es elegir K de forma que $p(t)$ se aproxime a la vecindad del punto fijo p^* en la siguiente iteración $p(t+1)$, esto es, de forma que $p(t+1) - p^* = 0$, entonces, sustituyendo y despejando en [5.7] para obtener K :

$$0 = (-1.6998 - 0.1972 * K) [p(t) - p^*]$$

$$0 = (-1.6998 - 0.1972 * K)$$

$$K = \frac{1.6998}{-0.1972} = -8.6179$$

Verificamos que se cumple la condición de estabilidad del sistema $|-1.6998 - 0.1972 * K| = 0 < 1$. El sistema con control quedará, por consiguiente, como:

$$p(t+1) = f(p(t), \delta(t+1)) = (1 + \delta(t+1))p(t)(1 - p(t)) \quad [5.8]$$

con

$$\delta(t+1) = \begin{cases} \bar{\delta} & \text{si } |p(t) - p^*| \geq \Delta_{max}/K \\ \bar{\delta} - K[p(t) - p^*] & \text{si } |p(t) - p^*| < \Delta_{max}/K \end{cases}$$

siendo Δ_{max} la máxima variación del parámetro $\bar{\delta}$ permitida $|p(t) - p^*| < \Delta_{max}$. En este caso, por tanto, al ser $K = -8.6179$, la ley de control [5.7] muestra que cuando los precios se sitúan por encima de los precios de equilibrio deberá activarse (en un entorno del punto fijo) una política monetaria contractiva.

La ley de control [5.7] se activará cuando la trayectoria caótica de los precios $p(t)$ se aproxime a la órbita periódica elegida $(p^*, \bar{\delta}) = (0.7297, 2.7)$ haciendo que se estabilice en ella. En la Figura 5.4 mostramos la evolución

del sistema de Futoma y Southwrth [5.4] con sin control $\delta = 2.7$ que muestra comportamiento caótico. La Figura 5.5 muestra la evolución de este mismo sistema pero con el control optimo derivado anteriormente [5.8], este control se ha introducido a partir de la observación 300. Hasta este instante el sistema muestra el mismo comportamiento caótico, pero a partir de entonces, cuando el sistema entra en la vecindad del punto fijo deseado, se aplica la regla de control en [5.8]. Además como K se ha elegido de forma que se llegue al punto fijo en un solo periodo sólo es necesario intervenir una vez en el sistema, ya que como no hay perturbaciones que alejen el sistema de este punto fijo inestabilizado, el sistema permanece en él de manera sostenida sin necesidad de volver a intervenir.

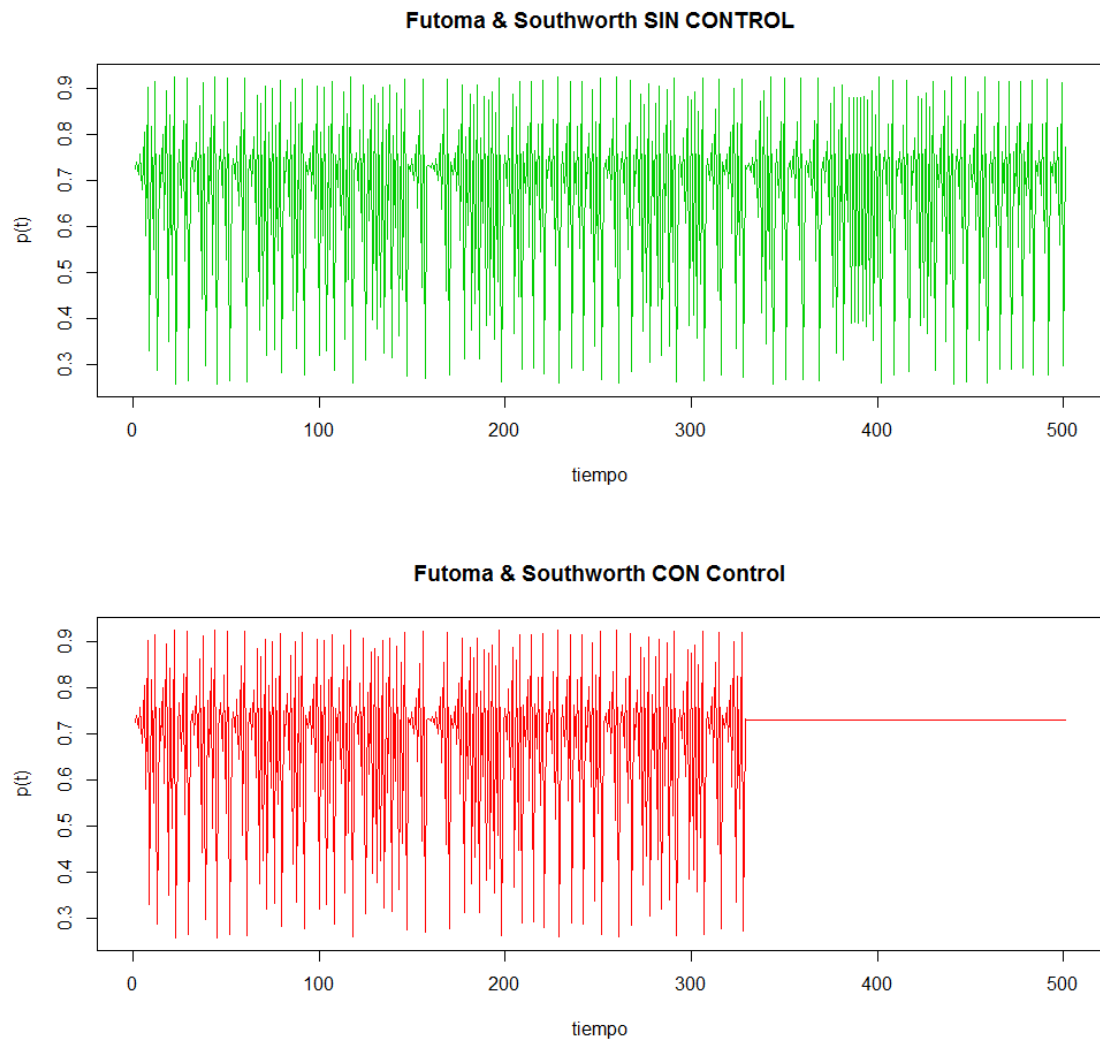


Figura 5.4. Solución del modelo de Futoma y Southworth **SIN** control (arriba) y **CON** control a partir de $t=300$ (abajo)

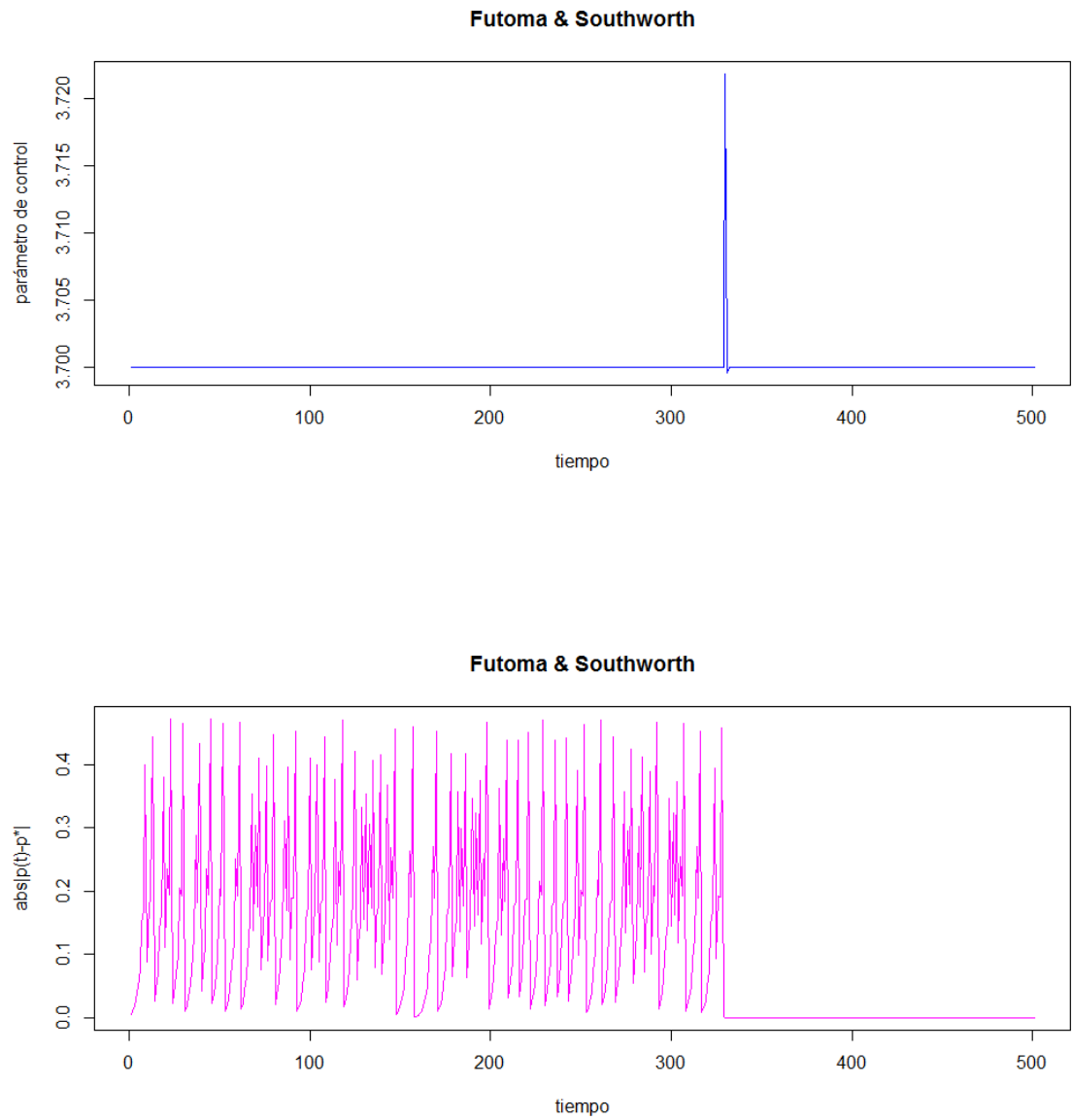


Figura 5.5. Intervención y desviación respecto al valor objetivo en el modelo de Futoma y Southworth CON control a partir de $t=300$

5.2 Control en el modelo no lineal de Soliman (1996) de inflación – desempleo

El segundo de los modelos que vamos a analizar en este capítulo es el modelo de inflación con desempleo de Soliman (1996). La relación entre inflación y desempleo ha sido discutida con amplitud en la literatura económica. Una aproximación ampliamente utilizada para modelar la relación entre inflación y desempleo se basa en el comportamiento dinámico observado entre dichas variables y recogido bajo la denominación de Curva de Phillips. Soliman (1996a y 1996b) adopta una aproximación fenomenológica usando un sistema de ecuaciones basado en una curva de Phillips con pendiente negativa y no lineal. Esto es, se asume una relación inversa no lineal entre inflación y desempleo. La explicación teórica más ampliamente argumentada en la literatura para la existencia de esta Curva de Phillips no lineal se basa en la hipótesis de rendimientos marginales decrecientes del exceso de demanda de trabajo en la reducción del desempleo (Limpsey; 1960), esto es, que un exceso de demanda de trabajo reduce el desempleo, pero los aumentos sucesivos en el exceso de demanda de trabajo producen una reducción en el desempleo cada vez menor. Precisamente la fuente subyacente de no linealidad en la dinámica del modelo de Soliman, responsable de la aparición de dinámicas complejas en la inflación y el desempleo, es precisamente esta relación no lineal entre el exceso de demanda de trabajo y el nivel de desempleo, aproximada por la curva de Phillips original.

Soliman (1996a, 1996b) presenta dos modelos con dos formas funcionales diferentes, llamadas empírica y exponencial, para relacionar inflación y desempleo, ya que, aunque existe una justificación teórica para la relación no lineal entre inflación y desempleo, no hay acuerdo sobre su forma funcional concreta (Santemero., A., & Seater, J. 1978).

El modelo genérico presentado por Soliman (1996a) es el siguiente:

$$\begin{aligned}\pi_t &= f(u_t) + a\pi_t^e, \quad 0 \leq a \leq 1, \quad \frac{df}{du} < 0 \\ \pi_{t+1}^e &= \pi_t^e + c(\pi_t - \pi_t^e), \quad 0 \leq c \leq 1 \\ u_{t+1} &= -b(m - \pi_t) + u_t, \quad b > 0\end{aligned}\tag{5.9}$$

donde π_t y π_t^e son las tasas de inflación actual y esperada en el periodo t , y u_t es el nivel de desempleo en el periodo t . El parámetro a de la primera ecuación del sistema [5.9] representa el grado en que la expectativa inflacionaria es incorporada en la inflación actual. La segunda ecuación representa el mecanismo de formación de las expectativas inflacionarias, que en este caso corresponden a expectativas adaptativas, en donde el parámetro c , muestra el grado de corrección de los errores en la predicción de la inflación actual.

La tercera ecuación representa los cambios en el nivel de desempleo. La hipótesis que incorpora esta ecuación es que la tasa de crecimiento de la oferta real de dinero, $m - \pi_t$, actúa en la producción y el empleo a través de cambios en la demanda. El grado de estos cambios está representado por el parámetro b o elasticidad del desempleo respecto al crecimiento de la oferta monetaria real.

Como hemos mencionado anteriormente, el modelo de Soliman (1996a) [5.1] incluye un término no lineal $f(u)$ para relacionar inflación y desempleo. Soliman trabaja con dos versiones del modelo dependiendo de la especificación de esta relación no lineal:

- *Modelo empírico:* $f(u_t) = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{u_t} + \frac{\alpha_3}{u_t^2}$
- *Modelo exponencial:* $f(u_t) = \beta_1 + \beta_2 e^{-u_t}$

Independientemente de la forma funcional establecida para la Curva de Phillips, Soliman supone que el crecimiento de la oferta monetaria m se determina de manera exógena a la propia dinámica del sistema. Su valor

viene determinado en cada momento por la decisión de la autoridad monetaria (*policy maker*). Desde este punto de vista del *policy maker* se enfrenta a un *problema de decisión*. El *policy maker* debe determinar en cada momento los valores que asigna al crecimiento de la cantidad de dinero m . Y deberá hacerlo precisamente de forma que su objetivo de política, esto es de forma que se establezca la evolución del sistema (inflación y desempleo) en determinado nivel de equilibrio.

Antes de presentar como aplicar el método OGY para deducir las reglas óptimas de control, se examinará la respuesta dinámica del modelo cuando se varía lentamente el parámetro de control m . Es decir, vamos a mostrar cómo cambia la relación inflación – desempleo cuando varía la tasa de crecimiento de la oferta monetaria (m), manteniendo fijos los demás parámetros. Con esto ejercicios de dinámica comparativa comprobaremos cómo efectivamente mediante el control de m el sistema converge hacia diferentes equilibrios dinámicos. Estos análisis de dinámica comparativa se representan a través de los gráficos de bifurcación, donde se muestra que, para ciertos valores críticos de los parámetros, el punto de equilibrio de las variables inflación esperada y tasa natural de desempleo (π_E^e, u_E) pierde su estabilidad en un punto de bifurcación, desencadenándose entonces cambios cualitativos en la dinámica del sistema. Esto es, el punto de equilibrio pierde su estabilidad y el sistema pasa de un comportamiento estable a uno cíclico y finalmente a uno caótico. Aplicando el método de control OGY, el cual usa precisamente las características de los sistemas dinámicos caóticos, llevaremos nuevamente el sistema inflación-desempleo a un comportamiento deseado, esto es lo estabilizaremos en una solución de periodo-1 o punto fijo del sistema.

La regla óptima de control que permita esta estabilización del sistema podrá interpretarse, por tanto, como la regla de óptima de política monetaria que debería utilizar el *policy maker* para alcanzar su objetivo de estabilidad

5.2.1 Modelo empírico de Soliman (1996a)

El modelo [5.9] de Soliman (1996a) presentado anteriormente puede reescribirse de forma más compacta como un sistema de dos ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned}\pi_{t+1}^e &= G(\pi_t^e, u_t) = c f(u_t) + (1 - c(1 - a))\pi_t^e \\ u_{t+1} &= H(\pi_t^e, u_t) = -b m + b f(u_t) + b a \pi_t^e + u_t\end{aligned}\quad [5.10]$$

Cuando $f(u) = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{u} + \frac{\alpha_3}{u^2}$, entonces estaremos ante el denominado por el propio Soliman (1996a) como modelo empírico, ya que ésta fue precisamente la forma de la relación no lineal entre inflación y desempleo estimada empíricamente por el propio Lipsey (1960) con los valores $\alpha_1 = -1.14$, $\alpha_2 = 5.53$, $\alpha_3 = 3.68$.

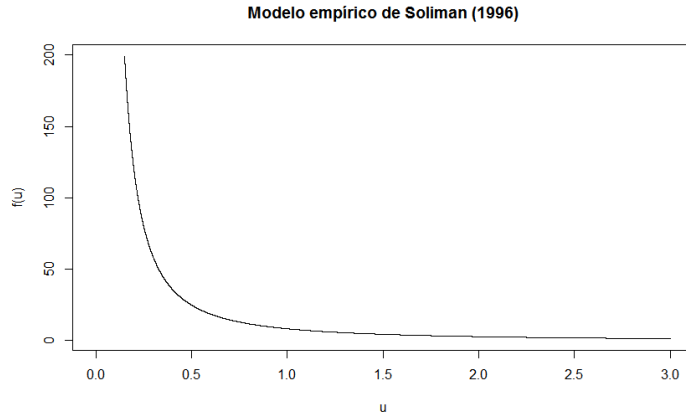


Figura 5.6. Curva de Phillips del modelo empírico de Soliman (1996)

5.2.1.1 Comportamiento dinámico del sistema

Los puntos fijos de equilibrio de [5.10] estarán dados por:

$$\begin{aligned}\pi_E^e &= m \\ f(u) &= m(1 - a)\end{aligned}$$

Esto es, que el estado estacionario de equilibrio implica una inflación determinada por la tasa de crecimiento de la oferta monetaria. La tasa de paro de equilibrio también depende de dicha tasa de crecimiento de la oferta

monetaria, además del resto de parámetros estructurales del modelo, aunque en este caso de manera no lineal, ya que teniendo en cuenta la expresión para $f(u)$ en el modelo empírico, la tasa de paro de equilibrio quedaría como:

$$u_E = \frac{-\alpha_2 \pm \sqrt{\alpha_2^2 - 4(\alpha_1 - m(1-a))\alpha_3}}{2(\alpha_1 + (a-1)m)}$$

Estos estados de equilibrio del sistema [5.10] corresponderán a niveles constantes de inflación y desempleo. Sin embargo, haciendo variaciones al parámetro m (crecimiento de la oferta monetaria) se presentarán cambios cualitativos en la relación dinámica inflación – desempleo, perdiendo el punto de equilibrio (π_E^e, u_E) su estabilidad, resultando en variaciones cíclicas entre inflación y desempleo o en comportamiento caótico.

Los gráficos de bifurcación (Figuras 5.7 y 5.8) muestran la respuesta del estado estacionario del sistema (π_E^e, u_E) , cuando se varía levemente la tasa de crecimiento de la oferta monetaria (m), empezando en $m = 11$ con condiciones iniciales correspondientes a la solución de periodo 1 $(\pi_E^e, u_E) = (11, 0.8797)$

La estabilidad del sistema en el punto fijo (π_E^e, u_E) estará determinada por los valores propios, λ_1 y λ_2 , de la matriz Jacobiana asociada. Para que exista estabilidad ambos valores propios deben ser en módulo menores que la unidad. Bajo la variación del parámetro de control m en la dirección de inestabilidad, hay un cambio cualitativo en el comportamiento del sistema en el punto crítico. La pérdida de estabilidad del punto de equilibrio (π_E^e, u_E) , que nos indica tasas constantes de inflación y desempleo, da lugar a variaciones cíclicas en estas variables económicas. Analíticamente, las bifurcaciones ocurren cuando los valores propios son reales y cruzan el límite de estabilidad del círculo unidad en -1. Aplicando control, hacemos que la variación del parámetro de control siga la dirección estable y que el sistema permanezca en un comportamiento estable deseado.

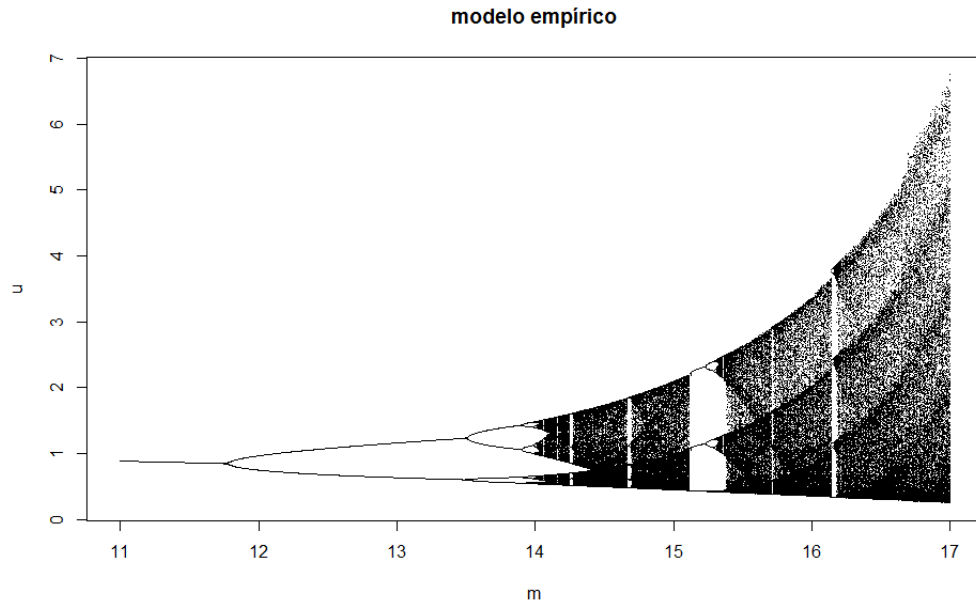


Figura 5.7. Gráfico de Bifurcación del modelo empírico de Soliman en la variable u . $a = 0.1, b = 0.1, c = 0.1, 11 < m < 17, \pi(0) = 0.5, \pi^e(0) = 11, u(0) = 0.8797$.

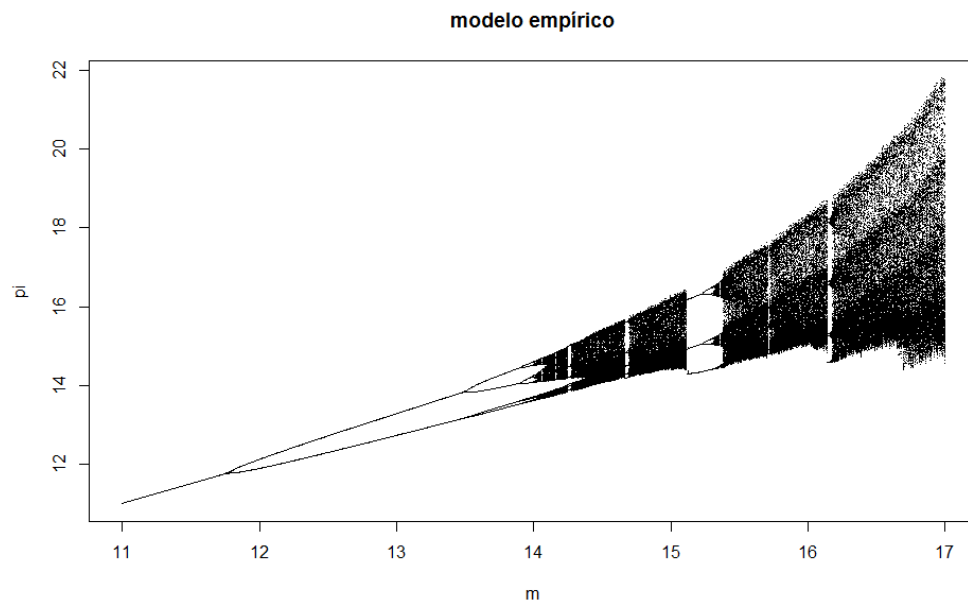


Figura 5.8. Gráfico de Bifurcación del modelo empírico de Soliman en la variable π^e . $a = 0.1, b = 0.1, c = 0.1, 11 < m < 17, \pi(0) = 0.5, \pi^e(0) = 11, u(0) = 0.8797$.

Se pueden usar algunas medidas para indicar la existencia de dinámica caótica, por ejemplo, la sensibilidad a las condiciones iniciales caracterizada por un exponente de Lyapunov positivo. La Figura 5.8 muestra el exponente de Lyapunov y por tanto el comportamiento caótico del sistema [5.10] para los diferentes valores del parámetro m :

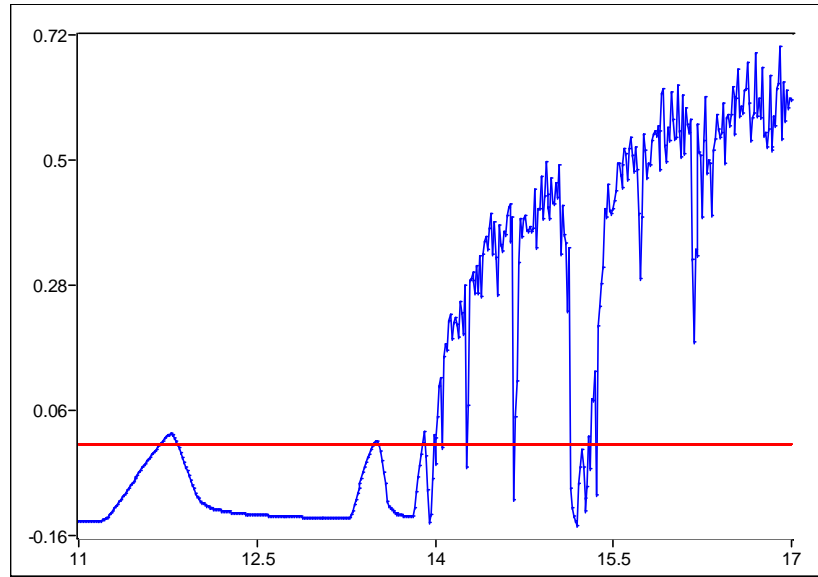


Figura 5.9. $a = 0.1, b = 0.1, c = 0.1, 11 < m < 17, \pi(0) = 0.5, \pi^e(0) = 11, u(0) = 0.8797$.

5.2.1.2 Control del comportamiento caótico del modelo empírico de Soliman de inflación-desempleo

El control del sistema [5.10] se hará para valores $a = 0.1, b = 0.1, c = 0.1, \alpha_1 = -1.14, \alpha_2 = 5.53, \alpha_3 = 3.68$. El parámetro de control m variará alrededor del valor nominal $\bar{m} = 16$ en el cual el sistema tiene un atractor caótico.

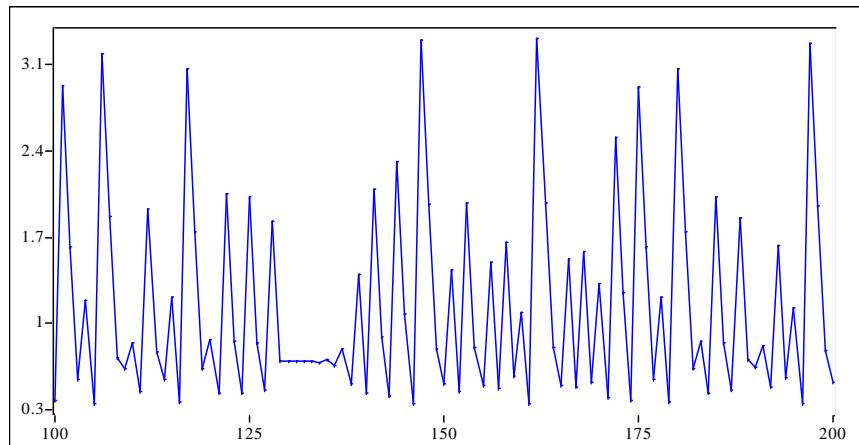


Figura 5.10. Modelo empírico de Soliman: Serie temporal caótica de la variable u con $m = 16$.

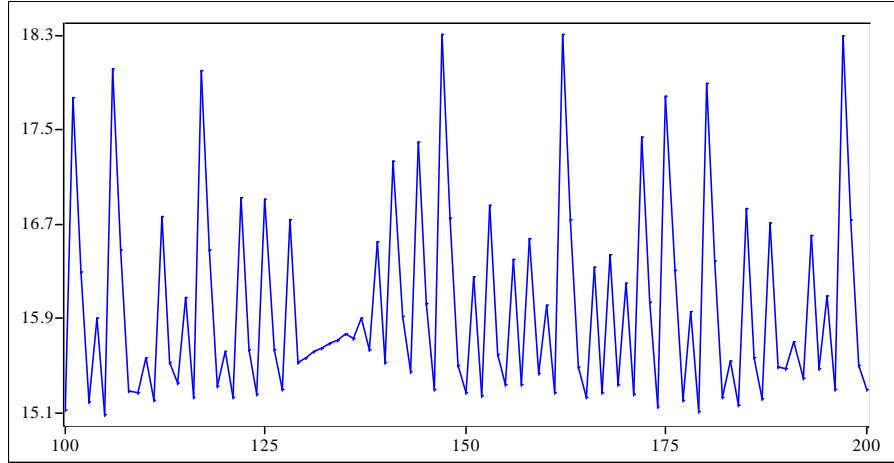


Figura 5.11. Modelo empírico de Soliman: Serie temporal caótica de la variable π^e con $m = 16$.

En este atractor coexisten infinitas órbitas periódicas inestables arbitrariamente próximas a cualquier punto; una de estas órbitas es el punto fijo inestable $(\pi_E^e, u_E) = (16, 0.6960655)$, en el cual se estabilizará la dinámica caótica del sistema haciendo pequeñas modificaciones a la tasa de crecimiento de la oferta monetaria (m).

Para valores de parámetro de control m cercanos a su valor en régimen caótico \bar{m} y en el entorno del punto fijo $(\pi_E^e, u_E) = (16, 0.6960655)$, el modelo [5.10] se puede aproximar linealmente por:

$$\begin{pmatrix} \pi_{t+1}^e - \pi_E^e \\ u_{t+1} - u_E \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \pi_t^e - \pi_E^e \\ u_t - u_E \end{pmatrix} + \mathbf{B} (m - \bar{m})$$

o escrito de forma compacta

$$\mathbf{Z}_{t+1} - \mathbf{Z}_E = \mathbf{A}(\mathbf{Z}_t - \mathbf{Z}_E) + \mathbf{B} (m - \bar{m}) \quad [5.11]$$

donde: $\mathbf{Z}_t = (\pi_t^e, u_t)^T$, $\mathbf{Z}_E = (\pi_E^e, u_E)^T$, \mathbf{A} es la matriz Jacobiana del sistema y \mathbf{B} es un vector n -dimensional de derivadas respecto al parámetro de control. \mathbf{A} y \mathbf{B} evaluadas en el punto fijo:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial \pi_t^e} & \frac{\partial G}{\partial u_t} \\ \frac{\partial H}{\partial \pi_t^e} & \frac{\partial H}{\partial u_t} \end{pmatrix}_{|u_E; \pi_E^e; \bar{m}} = \begin{pmatrix} 1 - c(1 - a) & cf'(u) \\ ba & bf'(u) + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - c(1 - a) & cf'(u_E) \\ ba & bf'(u_E) + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

con

$$f(u_t) = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{u_t} + \frac{\alpha_3}{u_t^2} \Rightarrow f'(u_t) = \frac{-\alpha_2}{u_t^2} + \frac{-2\alpha_3}{u_t^3}$$

$$\bullet \quad B = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial m} \\ \frac{\partial H}{\partial m} \end{pmatrix}_{|u_E; \pi^e_E; \bar{m}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -b \end{pmatrix}$$

El control se introduce suponiendo que el parámetro m es una función lineal de las variables de estado:

$$\begin{cases} m = \bar{m} & , si |K^T(Z_t - Z_E)| > \varepsilon_0 \\ m = \bar{m} - K^T(Z_t - Z_E) & , si |K^T(Z_t - Z_E)| \leq \varepsilon_0 \end{cases} \quad [5.12]$$

Consistiendo el problema del control en determinar el valor del vector K^T que estabiliza el sistema entorno al estado estacionario Z_E

Sustituyendo [5.12] en [5.11] obtenemos el sistema linealizado en lazo cerrado:

$$Z_{t+1} - Z_E = (A - BK^T)(Z_t - Z_E)$$

Se debe determinar el valor de K^T para que la matriz $(A - BK^T)$ sea asintóticamente estable y el sistema se estabilice en la órbita de periodo uno elegida. Para ello, primero obtenemos las matrices de derivadas parciales A y B según se ha visto anteriormente:

$$\bullet \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial \pi_t^e} & \frac{\partial G}{\partial u_t} \\ \frac{\partial H}{\partial \pi_t^e} & \frac{\partial H}{\partial u_t} \end{pmatrix}_{|u_E; \pi^e_E; \bar{m}} = \begin{pmatrix} 0.91 & -3.323731 \\ 0.01 & -2.323731 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad B = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial m} \\ \frac{\partial H}{\partial m} \end{pmatrix}_{|u_E; \pi^e_E; \bar{m}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.1 \end{pmatrix}$$

Verificamos la condición de controlabilidad del sistema:

$$C = (B : AB) = \begin{pmatrix} 0 & 0.3323731 \\ -0.1 & 0.2323731 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el determinante $\det(C)=0.03323731$ por lo que el rango de la matriz C es 2, además,

$$C \times C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, concluimos que es posible la ubicación arbitraria de polos. Así, para la obtención de los polos reguladores obtenemos en primer lugar el polinomio característico de A :

$$(\lambda I - A) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i)$$

En nuestro caso el polinomio característico tomará la forma de

$$(s - \lambda_u)(s - \lambda_e) = s^2 + (-\lambda_e - \lambda_u)s + \lambda_e \lambda_u$$

Siendo λ_e y λ_u los valores propios de la matriz A

$$\begin{pmatrix} \lambda - 0.91 & -3.323731 \\ 0.01 & \lambda + 2.323731 \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1.413731\lambda - 2.081358$$

Las raíces de esta ecuación característica proporcionan los siguiente valores propios:

- $\lambda_s = 0.8996888$
- $\lambda_u = -2.3134198$

Que efectivamente satisfacen las condiciones sobre los coeficientes del polinomio característico:

- $a_1 = (-\lambda_s - \lambda_u) = 1.413731$
- $a_2 = (\lambda_s \lambda_u) = -2.081358$

Las trayectorias caóticas de la inflación y el desempleo se acercan al punto fijo inestable siguiendo la dirección estable $\lambda_s = 0.8996888$ y se aleja del punto siguiendo la dirección inestable $\lambda_u = -2.3134198$.

Con la variación del parámetro de control m se busca que el sistema inflación-desempleo siga la dirección estable de la órbita periódica elegida en cada iteración. La elección de K^T , dados A y B , se establece de forma que el sistema sea estable, es decir que los valores propios $\{\mu_1, \mu_2\}$ o polos reguladores de la matriz $(A - BK^T)$ sean en módulo menores que la unidad.

Una elección adecuada será igualar los polos reguladores $\{\mu_1, \mu_2\}$ con los valores propios estables de la matriz A , aunque utilizando sólo los autovalores estables de A , de forma que los autovalores inestables de A se sustituyen por ejemplo por cero, así: $\mu_1 = 0$ y $\mu_2 = \lambda_s = 0.8996888$. Con esta elección hacemos que en cada iteración la trayectoria caótica se acerque al punto fijo siguiendo la dirección estable y luego permanezca allí.

Con los polos reguladores hallamos el polinomio característico deseado:

$$(\lambda I - A + BK^T) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n = \prod_{j=1}^n (s - \mu_j)$$

Con $\mu_1 = 0$ y $\mu_2 = \lambda_e = 0.8996888$. En nuestro caso el polinomio característico tomará la siguiente expresión:

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) = s^2 + (-\mu_1 - \mu_2)s + \mu_1\mu_2$$

Por lo que los coeficientes del polinomio deseado serían (sustituyendo el valor de los polos reguladores $\mu_1 = 0$ y $\mu_2 = \lambda_e = 0.8996888$ en la expresión anterior):

- $\alpha_1 = -0.8996888$
- $\alpha_2 = 0$.

Una vez encontrados los coeficientes de las dos ecuaciones características, la solución al problema del emplazamiento de polos está dada por la **fórmula de Ackermann**:

$$K^T = \{\alpha_n - a_n, \dots, \alpha_1 - a_1\}T^{-1}$$

donde $\{a_1, \dots, a_n\}$ son los coeficientes del polinomio característico de A y $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ son los coeficientes del polinomio característico deseado $(A - BK^T)$ y $T = CW$, con

$$W = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo, en nuestro caso:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.413731 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que:

$$\mathbf{T} = \mathbf{C}\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & 0.3323731 \\ -0.1 & 0.2323731 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.413731 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0.3323731 & 0 \\ 0.091 & -0.1 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{K}^T = \{\alpha_2 - a_2, \alpha_1 - a_1\} \mathbf{T}^{-1}$$

Por tanto:

$$\mathbf{K}^T = \{-0.07176911, 23.1343\}$$

La ley de control quedará:

$$\begin{cases} m = \bar{m} & , si |\mathbf{K}^T(\mathbf{Z}_t - \mathbf{Z}_E)| > \varepsilon_0 \\ m = \bar{m} - \mathbf{K}^T(\mathbf{Z}_t - \mathbf{Z}_E) & , si |\mathbf{K}^T(\mathbf{Z}_t - \mathbf{Z}_E)| \leq \varepsilon_0 \end{cases} \quad [5.13]$$

Nótese que esta regla de control [5.13] toma la expresión, en un entorno del punto fijo que se desea estabilizar, de la ya conocida regla monetaria tipo Taylor:

$$m = \bar{m} + k_1 * (\pi_t^e - \pi_E^e) + k_2 * (u_t - u_E) \quad [5.14]$$

con $k_1 = -0.07176911$ (cuando la inflación es superior a la de equilibrio la política debe ser contractiva) y $k_2 = 23.1343$ (cuando la tasa de desempleo es superior a la de equilibrio la política debe ser expansiva)

Aplicando el control al modelo [5.10] logramos estabilizar el comportamiento caótico del sistema en el punto fijo $(\pi_E^e, u_E) = (16, 0.6960655)$.

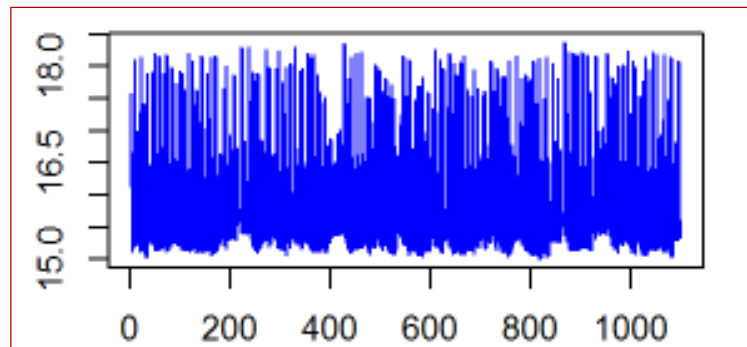


Figura 5.12a. Serie temporal caótica de la variable π^e sin control.

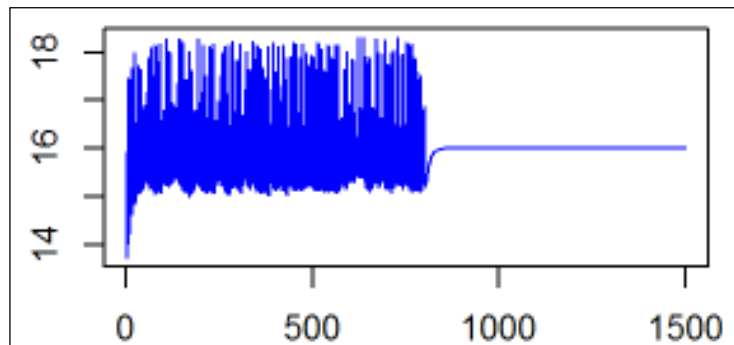


Figura 5.12b. Serie temporal caótica de la variable π^e controlada.

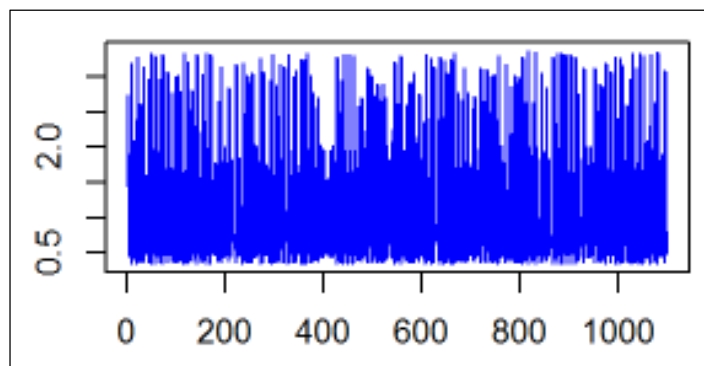


Figura 5.13a. Serie temporal caótica de la variable u sin control.

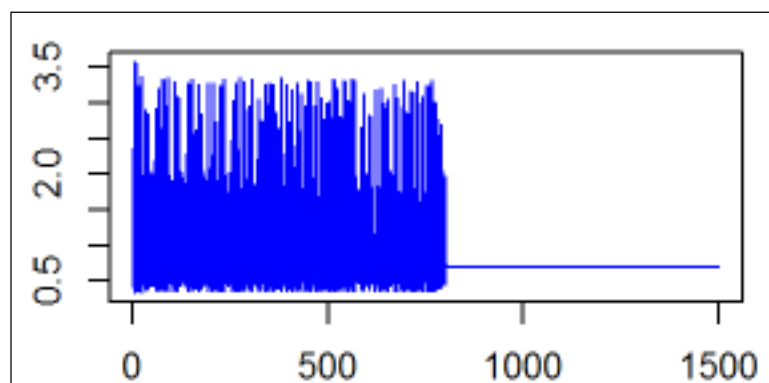


Figura 5.13b. Serie temporal caótica de la variable u con control.

La solución del sistema con y sin control puede describirse igualmente a través del histograma de frecuencia de los valores de π_t^e, u_t (Figura 5.13c)

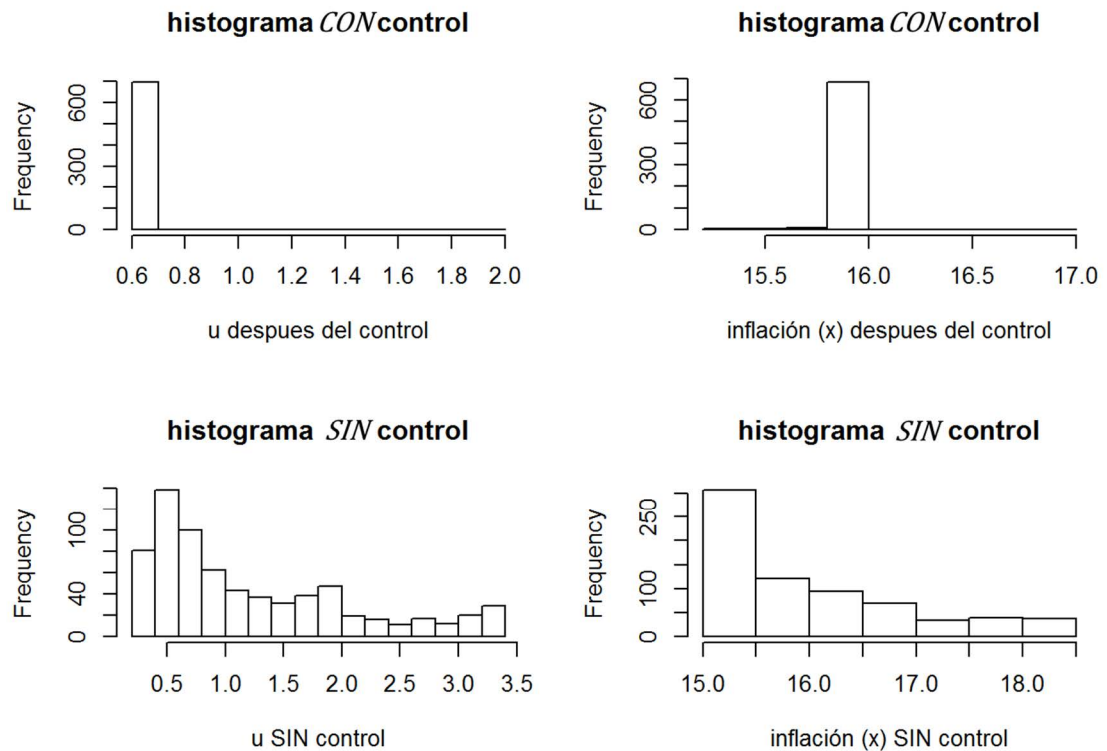


Figura 5.13c. Histograma de frecuencias de los valores de π_t^e, u_t con y sin control del sistema.

Mientras que la transición del sistema en el espacio de fases desde la situación caótica hasta que el sistema es controlado y estabilizado en el punto fijo puede representarse en la Figura 5.13.d

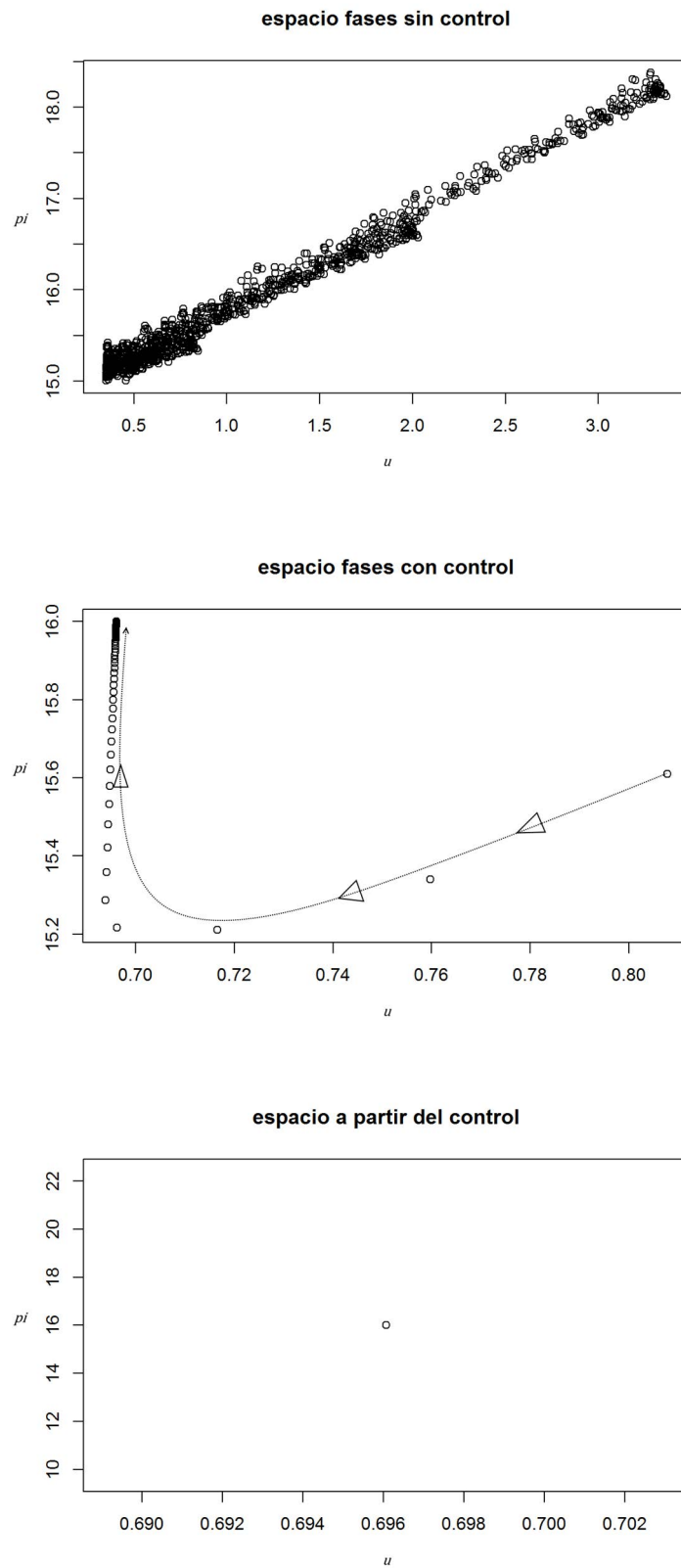


Figura 5.13d. Espacio de fases antes, durante y después del control

5.2.2 Modelo exponencial de Soliman (1996b)

Esta versión del modelo no lineal (Soliman, 1996b) presenta una forma funcional exponencial en la relación inflación-desempleo:

$$\begin{aligned}\pi_t &= f(u_t) + a\pi_t^e, \quad 0 \leq a \leq 1, \quad \frac{df}{du} < 0 \\ \pi_{t+1}^e &= \pi_t^e + c(\pi_t - \pi_t^e), \quad 0 \leq c \leq 1 \\ u_{t+1} &= -b(m - \pi_t) + u_t, \quad b > 0\end{aligned}\tag{5.15}$$

siendo la curva de Phillips para el modelo exponencial:

$$f(u) = \beta_1 + \beta_2 e^{-u}$$

con significados para las variables y los parámetros como en [5.10] y $\beta_1 = -2.5$ y $\beta_2 = 20$.

Curva de Phillips del modelo exponencial de Soliman (1996)

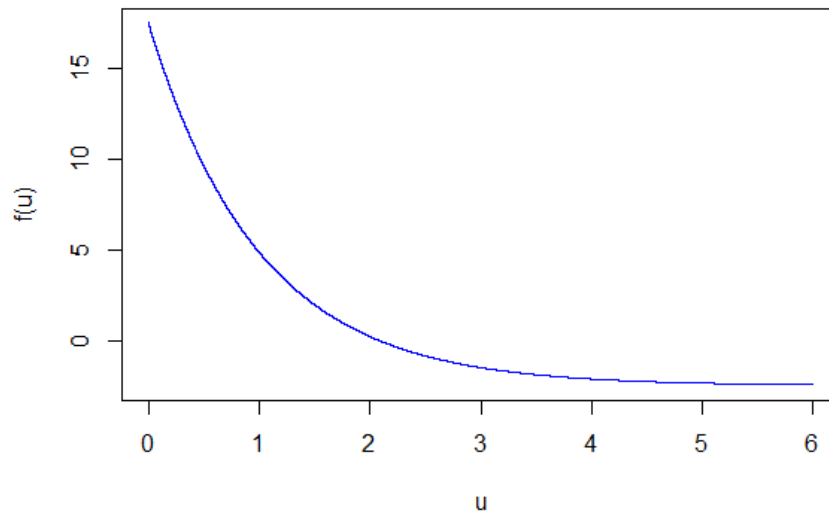


Figura 5.14. Curva de Phillips en el modelo exponencial de Soliman (1996b)

5.2.2.1 Comportamiento dinámico del sistema

Empleando la forma funcional exponencial, Soliman(1996b) realiza el análisis de la dinámica del modelo empleando como parámetro de control la elasticidad del desempleo respecto al crecimiento de la oferta monetaria real b y manteniendo fijos los parámetros $a = 1$, $m = 2$ y $c = 0.75$.

El estado de equilibrio para este valor de los parámetros es $\{(\pi_E^e, u_E) = (2, 2.079)\}$. Variando levemente el parámetro b , la evolución del sistema cambia desde una solución estable de periodo 1, a comportamiento cíclico y caótico. En efecto, como puede apreciarse en las Figuras 5.15 a 5.19, que representan el espacio de fases para diferentes valores del parámetro b y representando la inflación esperada (π^e) en el eje de abscisas, y tasa de desempleo (u) eje de ordenadas.

Como puede observarse la dinámica del sistema converge a diferentes atractores cuando vamos variando el parámetro de control. Con $b = 0.667$ la dinámica entre inflación esperada y desempleo se estabiliza en un punto fijo.

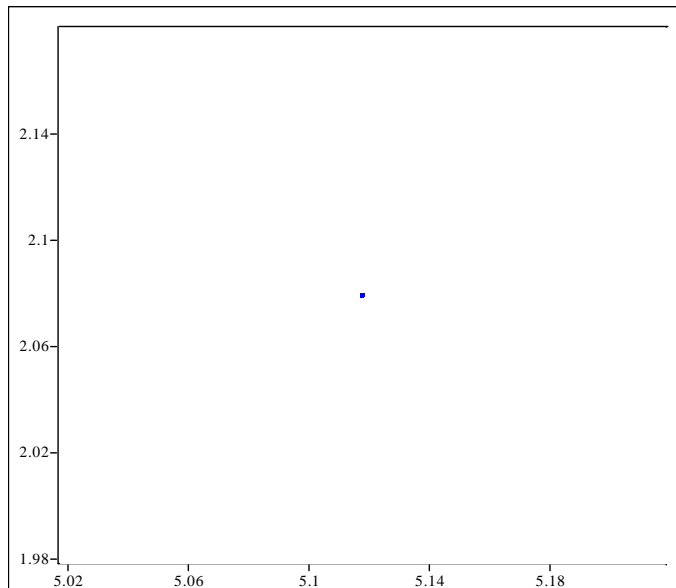


Figura 5.15. $b = 0.667$

Un leve incremento en b hace que los valores naturales de inflación y desempleo pierdan su estabilidad. Con $b= 0.674$ la dinámica de inflación y desempleo se estabiliza en un ciclo límite.

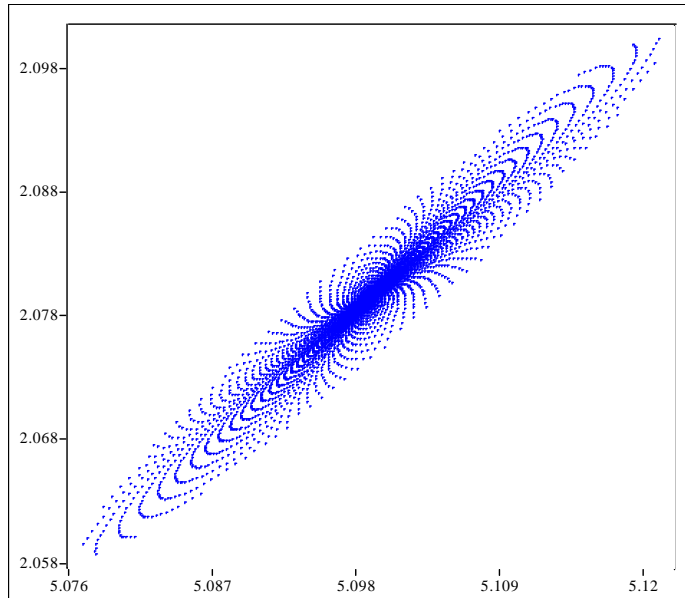


Figura 5.16. $b = 0.671$

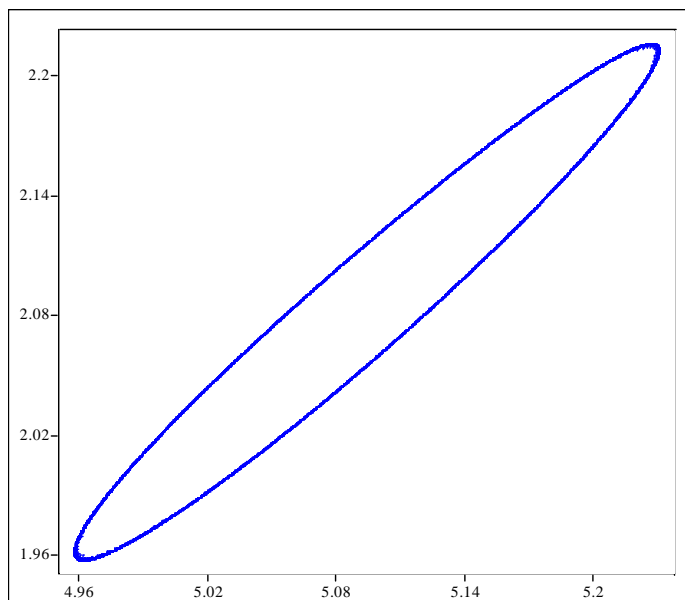


Figura 5.17. $b = 0.674$

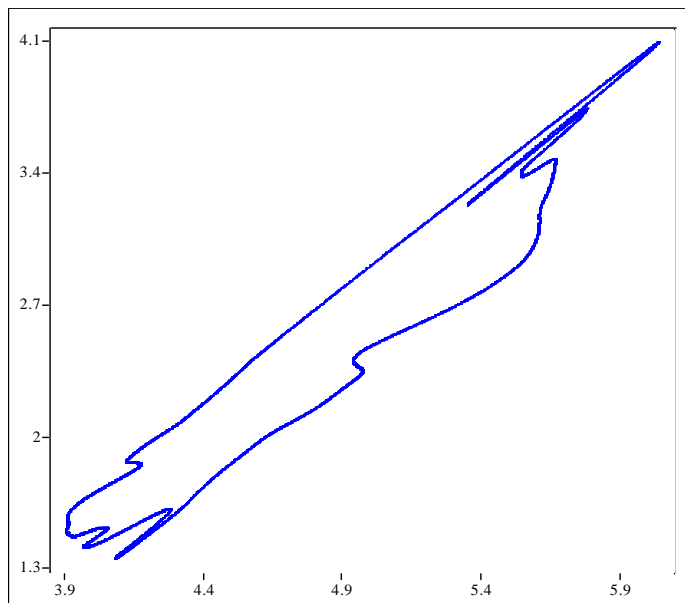


Figura 5.18. $b = 0.864$

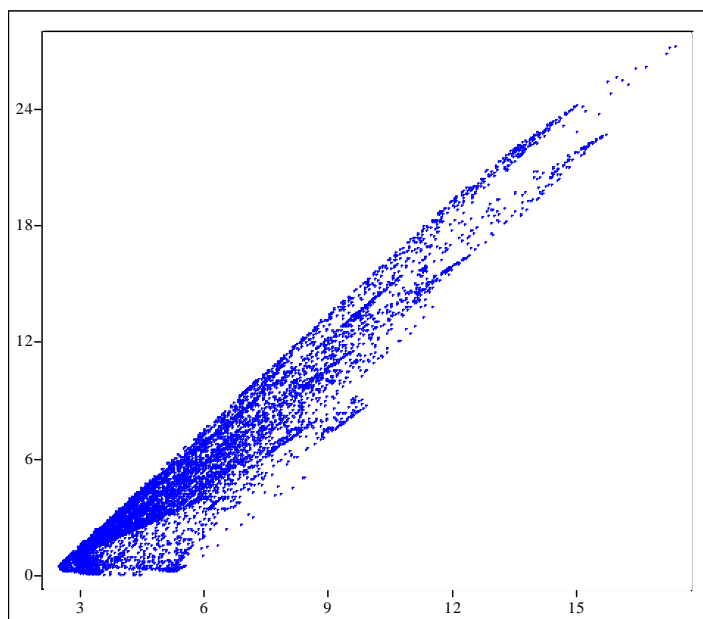


Figura 5.19. $b = 1.47$

La estabilidad del comportamiento cíclico entre inflación y desempleo se va perdiendo a medida que va aumentando levemente b . La dinámica entre inflación y desempleo se estabiliza en un atractor caótico ante mayores incrementos de b .

Aunque el autor emplea b como parámetro de control, nosotros controlaremos la dinámica caótica variando levemente el parámetro m o tasa de crecimiento de la oferta monetaria. De igual forma que en el modelo empírico [5.10], reescribimos el sistema [5.15]:

$$\begin{aligned}\pi_{t+1}^e &= G(\pi_t^e, u_t) = c f(u_t) + (1 - c(1 - a))\pi_t^e \\ u_{t+1} &= H(\pi_t^e, u_t) = -b m + b f(u_t) + b a \pi_t^e + u_t\end{aligned}$$

con

$$f(u) = \beta_1 + \beta_2 e^{-u}$$

Con puntos de equilibrio dados por:

$$\begin{aligned}\pi_E^e &= m \\ f(u) &= m(1 - a)\end{aligned}$$

Y despejando u :

$$u_E = -\ln\left(\frac{m(1 - a) - \beta_1}{\beta_2}\right)$$

Ambos modelos, empírico [5.10] y exponencial [5.15] muestran una respuesta similar en su comportamiento cualitativo al variar el parámetro de control m .

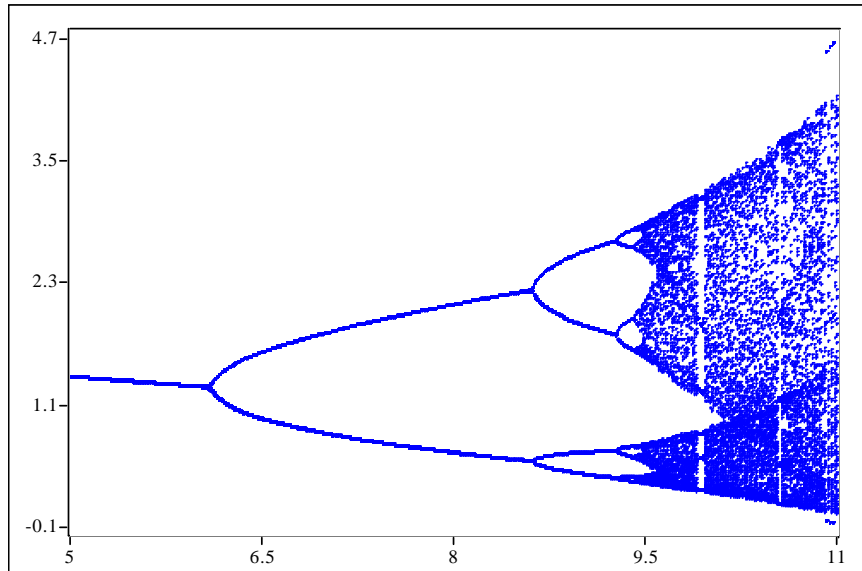


Figura 5.20. Gráfico de bifurcación de la variable u . $a = 0.5, b = 0.38, c = 0.2, 5 < m < 11, \pi(0) = 1, \pi^e(0) = 1, u(0) = 1$.

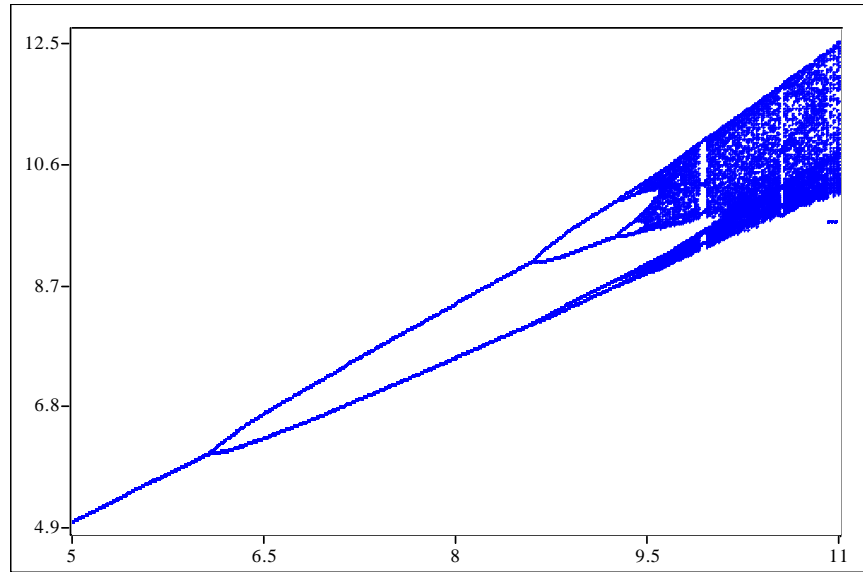


Figura 5.21. Gráfico de Bifurcación de la variable π^e . $a = 0.5, b = 0.38, c = 0.2, 5 < m < 11. \pi(0) = 1, \pi^e(0) = 1, u(0) = 1$.

El punto de equilibrio del sistema o niveles constantes de inflación y desempleo $(\pi_E^e, u_E) = (5, 1.386294361)$, pierde su estabilidad a medida que el crecimiento de la oferta monetaria m va aumentando su valor, dando lugar a variaciones cíclicas entre inflación y desempleo y, posteriormente, a comportamiento caótico. Este resultado se confirma a con los exponentes de Lyapunov del sistema (Figura 5.22).

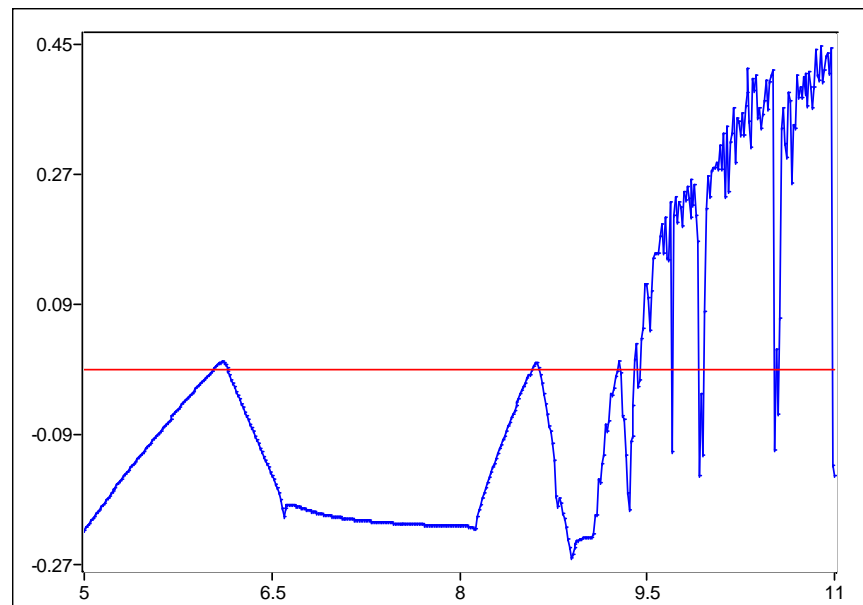


Figura 5.22. $a = 0.5, b = 0.38, c = 0.2, 5 < m < 11. \pi(0) = 1, \pi^e(0) = 1, u(0) = 1$.

5.2.2.2 Control del comportamiento caótico en el modelo inflación desempleo

El control del sistema [5.15] se hará para valores $a = 0.5, b = 0.38, c = 0.2, 11 \beta_1 = -2.5, \beta_2 = 20$. El parámetro de control m variará alrededor del valor nominal $\bar{m} = 10.5$ en el cual el sistema tiene un atractor caótico. El sistema será estabilizado en el punto fijo $(\pi_E^e, u_E) = (10.5, 0.9480)$.

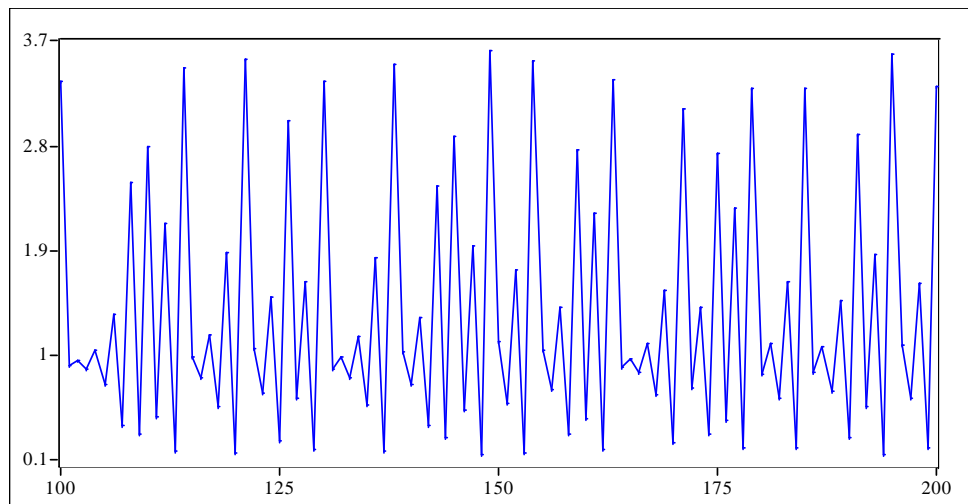


Figura 5.23. Serie temporal caótica de la variable u con $m = 10.5$.

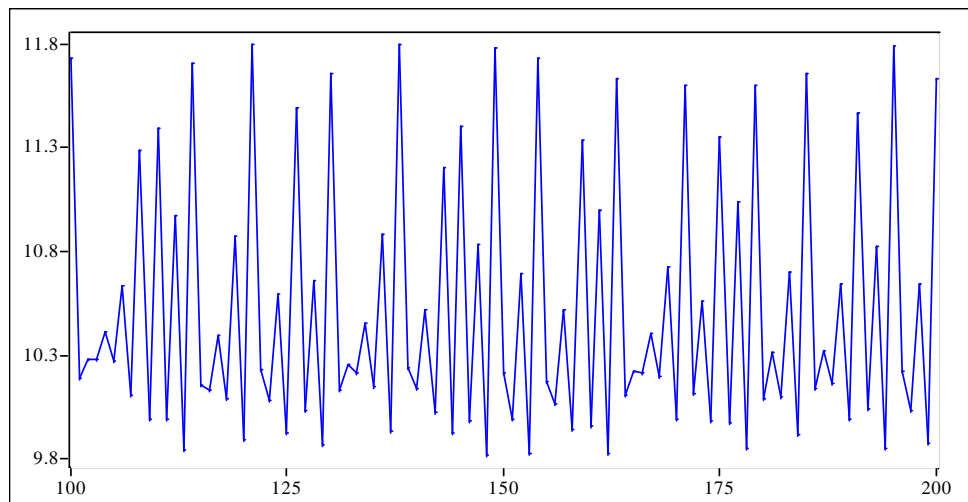


Figura 5.24 Serie temporal caótica de la variable π^e con $m = 10.5$.

Aproximamos linealmente el modelo [5.15] en torno al punto fijo a estabilizar:

$$\mathbf{Z}_{t+1} - \mathbf{Z}_E = \mathbf{A}(\mathbf{Z}_t - \mathbf{Z}_E) + \mathbf{B}(m - \bar{m}) \quad [5.16]$$

Donde: $\mathbf{Z}_t = (\pi_t^e, u_t)^T$, $\mathbf{Z}_E = (\pi_E^e, u_E)^T$, \mathbf{A} es la matriz Jacobiana del sistema y \mathbf{B} es un vector n -dimensional de derivadas respecto al parámetro de control. \mathbf{A} y \mathbf{B} evaluadas en el punto fijo:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial \pi_t^e} & \frac{\partial G}{\partial u_t} \\ \frac{\partial H}{\partial \pi_t^e} & \frac{\partial H}{\partial u_t} \end{pmatrix}_{|u_E; \pi_E^e; \bar{m}} = \begin{pmatrix} 1 - c(1 - a) & cf'(u) \\ ba & bf'(u) + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - c(1 - a) & cf'(u_E) \\ ba & bf'(u_E) + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

con

$$f(u) = \beta_1 + \beta_2 e^{-u} \Rightarrow f'(u_t) = -\beta_2 e^{-u_t}$$

$$\bullet \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial m} \\ \frac{\partial H}{\partial m} \end{pmatrix}_{|u_E; \pi_E^e; \bar{m}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -b \end{pmatrix}$$

Introducimos el control suponiendo que el parámetro m es una función lineal de las variables de estado:

$$\begin{cases} m = \bar{m} & , si \ |\mathbf{K}^T(\mathbf{Z}_t - \mathbf{Z}_E)| > \varepsilon_0 \\ m = \bar{m} - \mathbf{K}^T(\mathbf{Z}_t - \mathbf{Z}_E) & , si \ |\mathbf{K}^T(\mathbf{Z}_t - \mathbf{Z}_E)| \leq \varepsilon_0 \end{cases} \quad [5.17]$$

Sustituyendo [5.17] en [5.16] obtenemos el sistema linealizado en lazo cerrado:

$$\mathbf{Z}_{t+1} - \mathbf{Z}_E = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}^T)(\mathbf{Z}_t - \mathbf{Z}_E)$$

Ahora tenemos que determinar el valor de \mathbf{K}^T para que la matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{BK}^T)$ sea asintóticamente estable y el sistema se estabilice en la órbita de periodo uno elegida $(\pi_E^e, u_E) = (10.5, 0.9480)$. Para ello, primero obtenemos las matrices de derivadas parciales \mathbf{A} y \mathbf{B} :

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad A &= \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial \pi_t^e} & \frac{\partial G}{\partial u_t} \\ \frac{\partial H}{\partial \pi_t^e} & \frac{\partial H}{\partial u_t} \end{pmatrix}_{|u_E; \pi^e_E; \bar{m}} = \begin{pmatrix} 0.9 & -1.5500 \\ 0.19 & -1.9450 \end{pmatrix} \\
 \bullet \quad B &= \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial m} \\ \frac{\partial H}{\partial m} \end{pmatrix}_{|u_E; \pi^e_E; \bar{m}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.38 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Verificamos la condición de controlabilidad del sistema:

$$C = (B : AB) = \begin{pmatrix} 0 & 0.5890 \\ -0.38 & 0.7391 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el determinante $\det(C)=0.2238$ por lo que el rango de la matriz **C** es 2, además,

$$C \times C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, es posible la ubicación arbitraria de polos. Así, obtenemos en primer lugar el polinomio característico de **A**:

$$(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda - 0.9 & -1.5500 \\ 0.19 & \lambda + 1.9450 \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1.0450\lambda - 1.4560$$

Y del polinomio obtenemos los coeficientes:

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad a_1 &= (-\lambda_s - \lambda_u) = 1.0450 \\
 \bullet \quad a_2 &= (\lambda_s \lambda_u) = -1.4560
 \end{aligned}$$

y valores propios:

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \lambda_s &= 0.7924 \\
 \bullet \quad \lambda_u &= -1.8374
 \end{aligned}$$

La elección de K^T , dados **A** y **B**, se establece de forma que el sistema sea estable, es decir que los polos reguladores $\{\mu_1, \mu_2\}$ de la matriz $(A - BK^T)$ sean en módulo menores que la unidad. Elegimos los polos reguladores así:

$\mu_1 = \lambda_u = 0$ y $\mu_2 = \lambda_s = 0.7924$. Con esta elección hacemos que en cada iteración la trayectoria caótica se acerque al punto fijo siguiendo la dirección estable y luego permanezca allí.

Con los polos reguladores hallamos el polinomio característico deseado:

$$(\lambda I - A + BK^T) = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.7924 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 0.7924\lambda$$

Y del polinomio deseado obtenemos los coeficientes:

- $\alpha_1 = -0.7924$
- $\alpha_2 = 0$.

Por la fórmula de Ackermann obtenemos la solución al problema de la ubicación de los polos reguladores:

$$K^T = \{\alpha_n - a_n, \dots, \alpha_1 - a_1\}T^{-1}$$

Obtenemos la matriz $T = CW$:

$$W = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0450 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$T = CW = \begin{pmatrix} 0 & 0.5890 \\ -0.38 & 0.7391 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.0450 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 0.589 & 0.0 \\ 0.342 & -0.38 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$K^T = \{-0.3356, 4.8353\}$$

La ley de control quedará:

$$\begin{cases} m = \bar{m} & , si |K^T(Z_t - Z_E)| > \varepsilon_0 \\ m = \bar{m} - K^T(Z_t - Z_E) & , si |K^T(Z_t - Z_E)| \leq \varepsilon_0 \end{cases}$$

Nótese que de nuevo esta regla de control toma la expresión, en un entorno del punto fijo que se desea estabilizar, de la ya conocida regla monetaria tipo Taylor:

$$m = \bar{m} + k_1 * (\pi_t^e - \pi_E^e) + k_2 * (u_t - u_E) \quad [5.18]$$

con $k_1 = -0.3356$ (cuando la inflación es superior a la de equilibrio la política debe ser contractiva) y $k_2 = 4.8353$ (cuando la tasa de desempleo es superior a la de equilibrio la política debe ser expansiva). Aplicando el control al modelo [5.15] logramos estabilizar el comportamiento caótico del sistema en el punto fijo $(\pi_E^e, u_E) = (10.5, 0.9480)$.

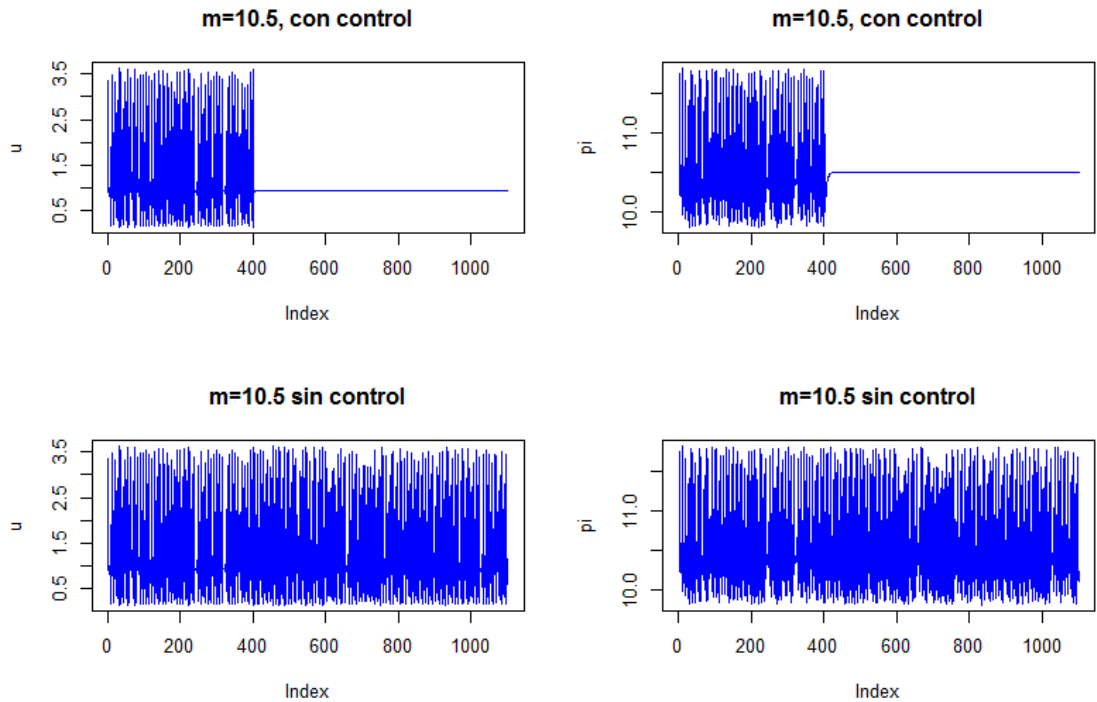


Figura 5.25 Soluciones al modelo exponencial Soliman sin control y con control a partir de $t=400$

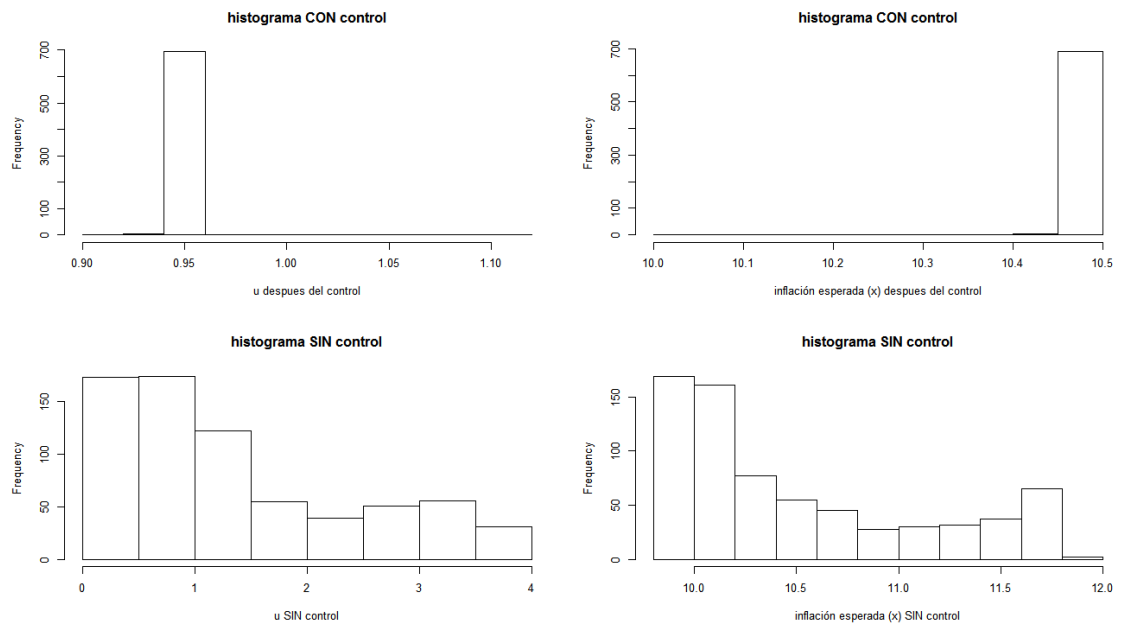


Figura 5.26 Histograma de valores en el atractor del modelo exponencial de Soluciones sin y con control

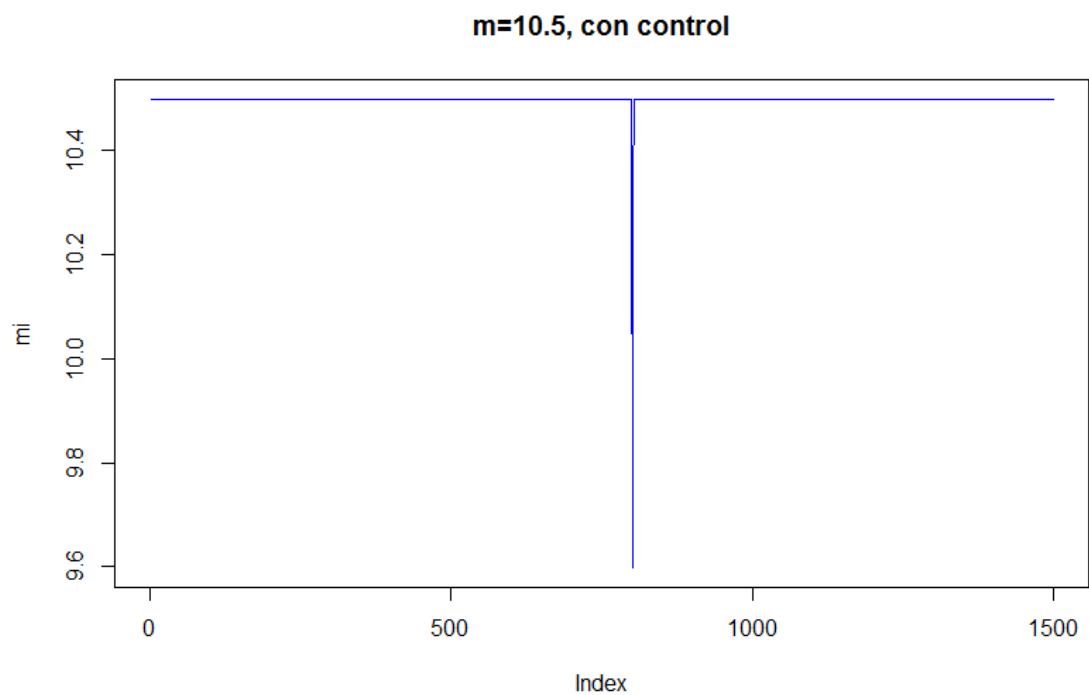


Figura 5.27. Intervención en el modelo de control de Soliman

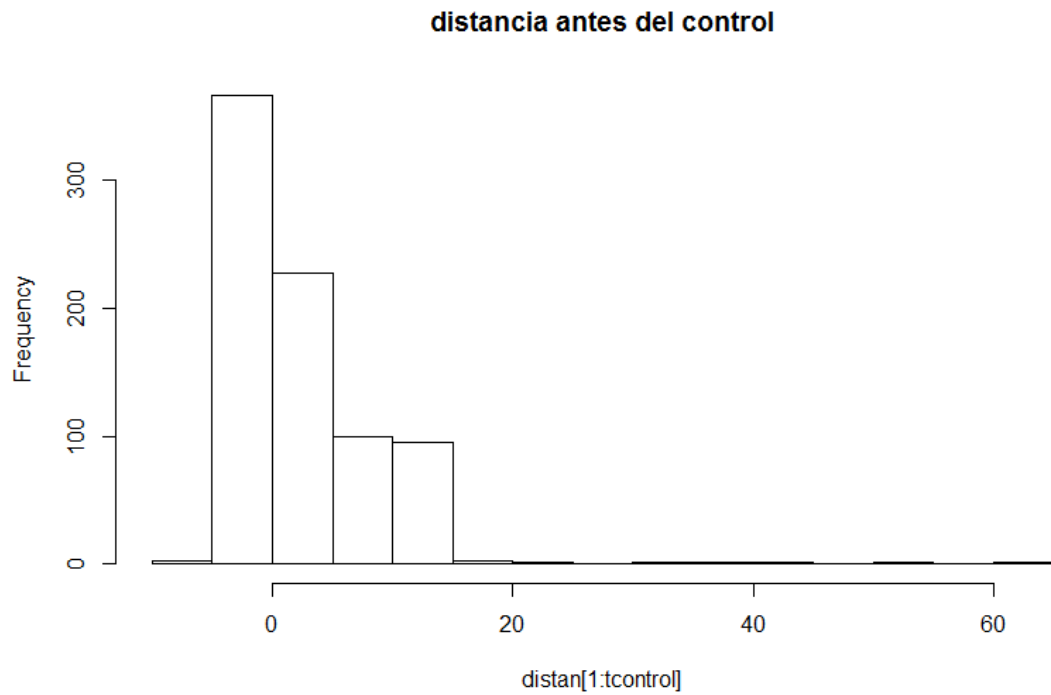


Figura 5.28. Histograma de distancias al punto fijo de equilibrio que se desea estabilizar antes del control

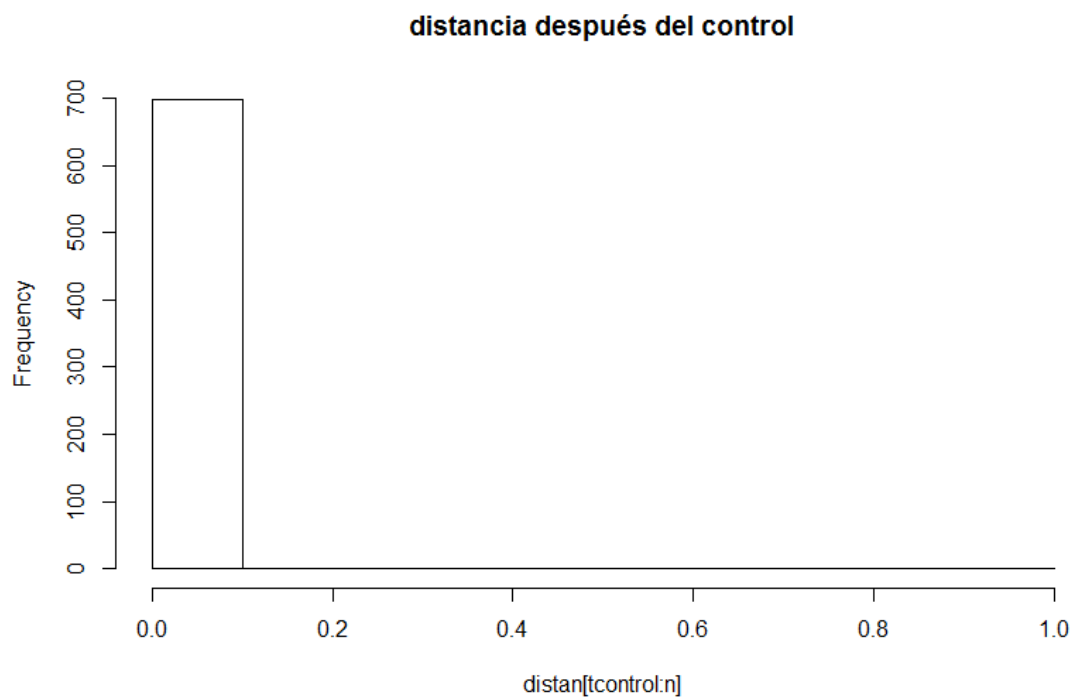


Figura 5.29. Histograma de distancias al punto fijo de equilibrio que se desea estabilizar después del control

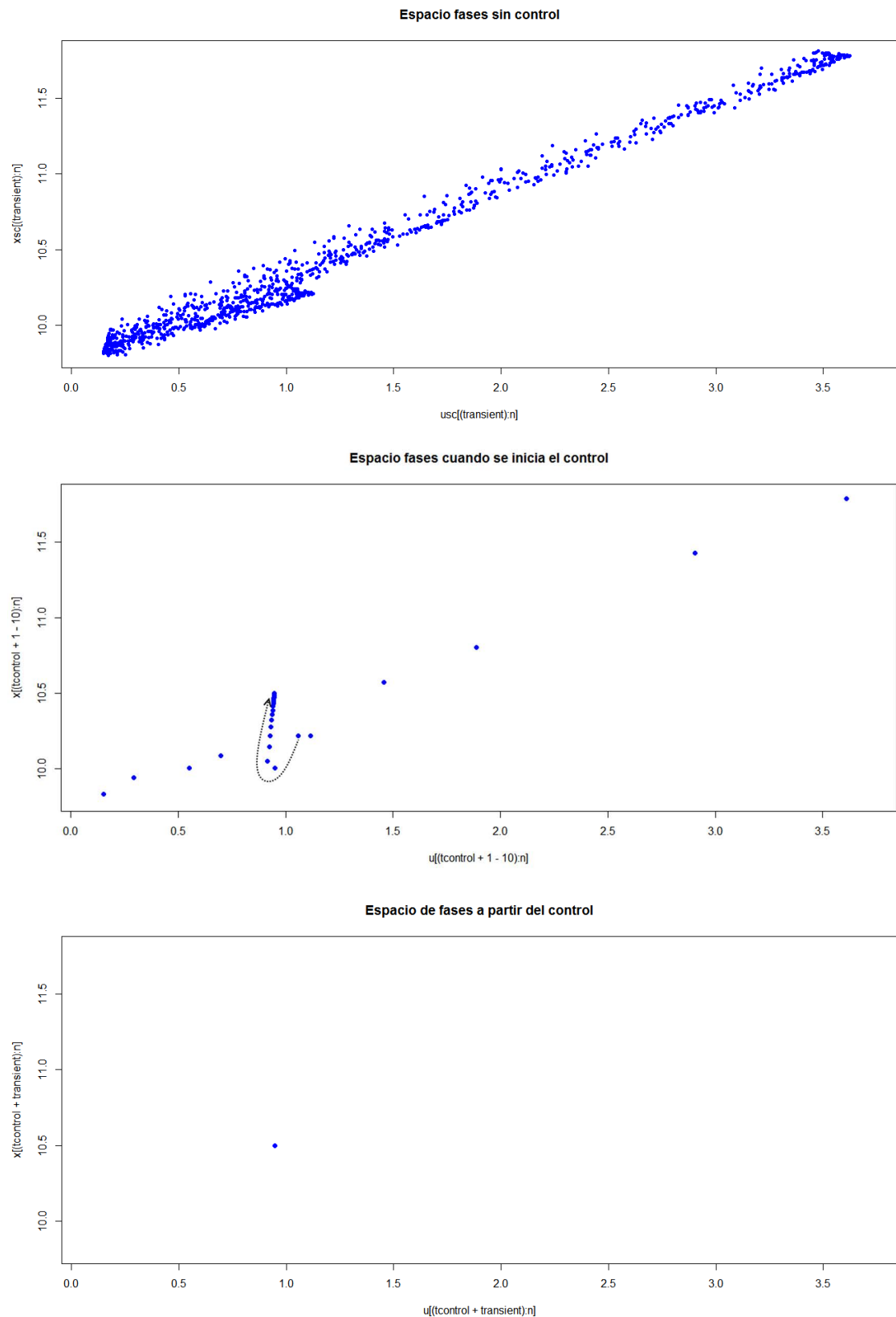


Figura 5.30. Espacio de Fases del modelo exponencial de Soliman antes, durante y después del control

5.3. Control en el modelo de hiperinflación de Punita (2011)

El tercer modelo que vamos a presentar en este capítulo es el modelo de Punita (2011) quien presenta un modelo de hiperinflación en el cual el dinero y los precios exhiben comportamiento caótico. La especificación consta de tres parámetros que dependiendo del valor que tomen darán lugar a un comportamiento estable de los precios (convergiendo a un punto fijo o a un ciclo límite) o a un comportamiento irregular (oscilando de forma caótica).

5.3.1. Derivación del modelo

La especificación del modelo es la siguiente:

Demanda de saldos reales

La función de demanda de dinero se formula bajo la hipótesis de que una variación en los saldos reales depende principalmente de la variación en la tasa de inflación.

$$\frac{M}{P(t)} = e^{-bp(t)} \quad [5.19]$$

Donde $\frac{M}{P(t)}$ es la demanda real de dinero en el periodo t , e es la base de los logaritmos naturales, $p(t)$ es la tasa de inflación en el periodo t , y $b > 0$ es una constante. La elasticidad de la demanda de saldos reales respecto a la tasa de inflación es $-bp$.

Inflación – dinero

El vínculo entre inflación y dinero establece un proceso dinámicamente inestable por medio del cual la oferta monetaria estimula o provoca la inflación.

$$p(t+1) = a\{m(t)\}, \quad a < 1 \quad [5.20]$$

Déficit presupuestal del gobierno

El déficit presupuestal durante la hiperinflación está relacionado con el crecimiento de la oferta monetaria debido a que la cantidad de dinero se incrementa para que el gasto del gobierno en términos nominales (G) sea cubierto con recursos reales; del mismo modo, los ingresos tributarios en términos nominales (T) caen rápidamente debido a los atrasos en el cálculo y en el pago de impuestos. Por lo tanto, el déficit presupuestario (BD) está definido como:

$$BD(t_0) = G(t) - T(t) \quad [5.21]$$

Durante la hiperinflación, la financiación del déficit con deuda o con préstamos es limitada. Esto implica que el gobierno no tenga otra alternativa que imprimir dinero para financiar su déficit. Así, tenemos:

$$M(t) = BD(t_0) = G(t) - T(t) \quad [5.22]$$

Donde $M(t)$ es el incremento en el stock de dinero en el periodo t . Dividiendo [5.22] por la oferta de dinero en el periodo t , $M(t)$, se obtiene:

$$m(t) = \left\{ \frac{M(t)}{M(t)} \right\} = \left\{ \frac{G(t)}{M(t)} \right\} - \left\{ \frac{T(t)}{M(t)} \right\} \quad [5.23]$$

Puede verse que las altas tasas de crecimiento del dinero, $m(t)$ se originan en un intento de financiación del déficit presupuestario.

Ingresos por impuesto inflacionario

Cuando el gobierno financia su déficit imprimiendo dinero, y el público lo agrega a su posesión de saldos nominales para mantener constante el valor

real de sus saldos monetarios, se dice que el gobierno se está financiando a través de un impuesto inflacionario.

El impuesto inflacionario $T(t)/P(t)$ corresponde al producto de la tasa de impuesto (la tasa de inflación) y el objeto del impuesto (la base monetaria real), i.e.,

$$\left\{ \frac{T(t)}{P(t)} \right\} = p(t) \left(\frac{M}{P(t)} \right) \quad [5.24]$$

Sustituyendo [5.20] en [5.24] se obtiene:

$$\left\{ \frac{T(t)}{P(t)} \right\} = p(t)e^{-bp(t)} \quad [5.25]$$

El ingreso total es máximo cuando la primera derivada de esta expresión con respecto a $p(t)$ es cero y la segunda derivada es negativa. Por lo tanto, la tasa de impuesto sobre los saldos monetarios reales, i.e., la tasa de inflación, que produce los ingresos máximos por inflación fiscal en [5.25] es igual a $(1/b)$.

La relación de los ingresos de la tasa de inflación recogidos en términos reales con el déficit presupuestario medido en términos nominales se asume con un rezago de un periodo en la recepción del impuesto. La ecuación [5.25] se multiplica por $P(t-1)$ para obtener los ingresos de la tasa de inflación en términos nominales. Esto produce la ecuación:

$$T(t) = P(t-1)p(t)e^{-bp(t)} \quad [5.26]$$

Sustituyendo [5.26] en [5.23] se obtiene:

$$M(t) = \left\{ \frac{G(t)}{M(t)} - \frac{P(t-1)}{M(t)} \right\} p(t)e^{-bp(t)} \quad [5.27]$$

5.3.2. Comportamiento dinámico del sistema

El ingreso máximo recibido por el gobierno estaría en la tasa de inflación óptima $p^* = (1/b)$. Una mayor tasa de inflación no produciría proporcionalmente mayores ingresos pues los saldos monetarios reales disminuirían en respuesta a tasas de inflación más altas, así que una mayor tasa de inflación daría menores ingresos al gobierno para financiar su déficit. Cuando esto ocurre, el déficit empezaría a expandirse como también lo haría la tasa de crecimiento del dinero y, en consecuencia, la economía tendría inflación a tasas sucesivamente mayores. Esto generaría un patrón de hiperinflación donde la evolución temporal de los precios sería creciente y explosiva.

Esta dinámica se puede observar sustituyendo [5.27] en [5.20] que produce la siguiente ecuación en diferencias de primer orden para la tasa de inflación:

$$p(t+1) = a \left(\left\{ \frac{G(t)}{M(t)} \right\} - \left\{ \frac{P(t-1)}{M(t)} \right\} e^{-bp(t)} \right) \quad [5.28]$$

Haciendo las siguientes dos sustituciones:

$$a \left\{ \frac{G(t)}{M(t)} \right\} = \varphi \quad [5.28a]$$

$$a \left\{ \frac{P(t-1)}{M(t)} \right\} = \theta \quad [5.28b]$$

Se obtiene el siguiente modelo caótico de inflación con tres parámetros:

$$p(t+1) = \varphi - \theta p(t) e^{-bp(t)} \quad [5.29]$$

Donde φ representa la ratio entre el gasto del gobierno y la oferta monetaria y θ , la ratio entre precios (rezagados un periodo) y oferta monetaria.

Con este modelo se puede observar cómo los precios de una economía en condiciones de hiperinflación pueden seguir evoluciones temporales distintas

de la creciente y explosiva, es decir, los precios pueden converger hacia un atractor de punto fijo, oscilar alrededor de un ciclo límite, o exhibir también comportamiento caótico.

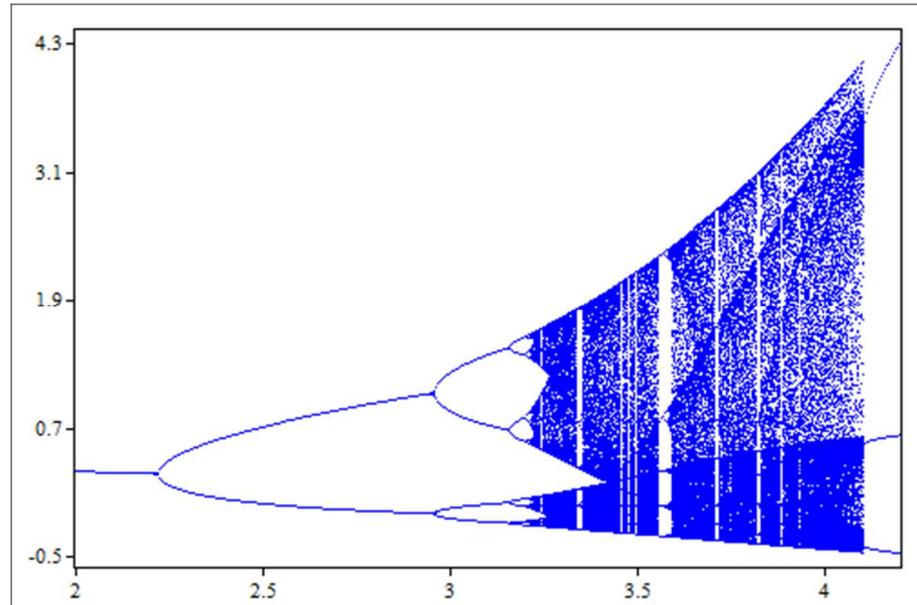


Figura 5.31 Bifurcación de los precios en el modelo $p(t+1) = \varphi - \theta p(t)e^{-bp(t)}$ en función del parámetro θ .

5.3.3. Control del comportamiento caótico en el modelo de hiperinflación

El objetivo del control será estabilizar los precios en un ciclo de periodo uno. Siguiendo el método OGY para el control del caos, estabilizaremos los precios en el punto fijo $p^* \approx 0.19^{64}$ para un valor nominal del parámetro $\bar{\theta} = 3.4$, con $\varphi = 0.7$ y $b = 1.3$. La perturbación máxima usada es $\delta_{max} = 0.2$.

⁶⁴ La ecuación [5.29] es una ecuación no lineal trascendental de primer orden por lo cual el punto fijo debe ser hallado por métodos numéricos o gráficos.

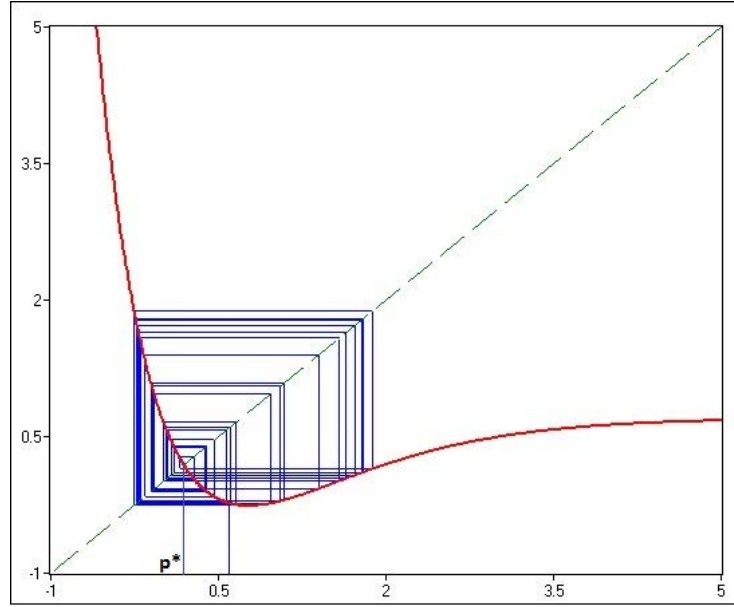


Figura 5.32. Solución caótica del modelo $p(t+1) = \varphi - \theta p(t)e^{-bp(t)}$ con la punto fijo elegido para estabilización.

Linealizando $p(t+1) = \varphi - \theta p(t)e^{-bp(t)}$ en torno a un punto fijo $(p^*, \bar{\theta}) = (0.19, 3.4)$ obtenemos:

$$p(t+1) - p^* = \left. \frac{\partial f(p(t), \theta)}{\partial p(t)} \right|_{p=p^*, \theta=\bar{\theta}} \cdot [p(t) - p^*] + \left. \frac{\partial f(p(t), \theta)}{\partial \theta} \right|_{p=p^*, \theta=\bar{\theta}} \cdot [\theta(t) - \bar{\theta}] \quad [5.30]$$

Donde:

$$\left. \frac{\partial f(p(t), \theta)}{\partial p(t)} \right|_{p=p^*, \theta=\bar{\theta}} = \bar{\theta} e^{-bp^*} (bp^* - 1) = -1.9999$$

$$\left. \frac{\partial f(p(t), \theta)}{\partial \theta} \right|_{p=p^*, \theta=\bar{\theta}} = -p^* e^{-bp^*} = 0.1484$$

La regla de control será:

$$\delta\theta(t) = [\theta(t) - \bar{\theta}] = -K[p(t) - p^*] \quad [5.31]$$

Sustituyendo [5.31] en [5.30]:

$$p(t+1) - p^* = (-1.9999 - 0.1484 * K) [p(t) - p^*]$$

Elegimos un valor de K que haga que $|-1.9999 - 0.1484 * K| < 1$. Para ello hacemos que en la iteración $p(t+1)$, la solución caótica se aproxime al punto fijo p^* , es decir $p(t+1) - p^* = 0$. De esta forma, despejando:

$$0 = (-1.9999 - 0.1484 * K) [p(t) - p^*]$$

$$0 = (-1.9999 - 0.1484 * K)$$

$$K = \frac{-1.9999}{-0.1484} = 13.4747$$

y verificamos que se cumple la condición de estabilidad del sistema $|-1.9999 - 0.1484 * K| = 0$.

El sistema con control por tanto será:

$$p(t+1) = f(p(t), \theta(t+1)) = \varphi(t) - \theta(t+1)p(t)e^{-bp(t)} \quad [5.32]$$

$$\theta(t+1) = \begin{cases} \bar{\theta} & \text{si } |p(t) - p^*| \geq \delta_{max}/K \\ \bar{\theta} - K[p(t) - p^*] & \text{si } |p(t) - p^*| < \delta_{max}/K \end{cases}$$

La máxima variación del parámetro $\bar{\theta}$ permitida $|p(t) - p^*| < \delta_{max}$.

En general, la regla de control será:

$$\delta\theta(t) = [\theta(t) - \bar{\theta}] = \frac{\frac{\partial f(p(t), \theta)}{\partial p(t)} \Big|_{p=p^*, \theta=\bar{\theta}} \cdot [p(t) - p^*]}{-\frac{\partial f(p(t), \theta)}{\partial \theta} \Big|_{p=p^*, \theta=\bar{\theta}}} \quad [5.33]$$

Por tanto,

$$\delta\theta(t) = \frac{\bar{\theta}e^{-bp^*}(bp^*-1)[p(t)-p^*]}{p^*e^{-bp^*}} = \frac{\bar{\theta}(bp^*-1)}{p^*} [p(t) - p^*] \quad [5.34]$$

O,

$$\delta\theta(t) = [\theta(t) - \bar{\theta}] = -K[p(t) - p^*]$$

Aplicando la ley de control [5.34] estabilizamos una trayectoria caótica de los precios en una órbita de periodo uno. Esta regla de control con $K = 13.4747$, implica que cuando los precios son mayores que los precios de equilibrio deseados la política debe ser contractiva; la política debe ser contractiva cuando los precios están por debajo del valor deseado; y la política debe permanecer en sus valores fijos en caso contrario

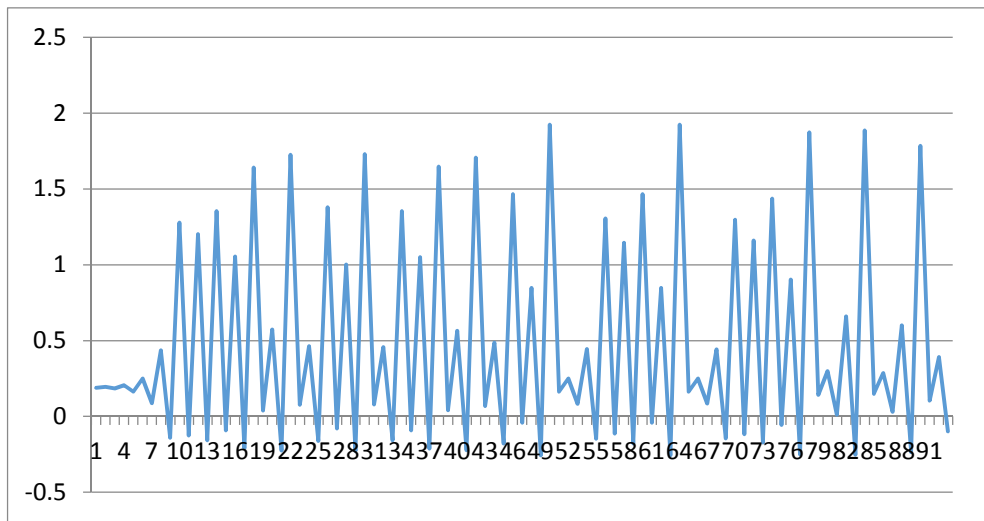


Figura 5.32. Solución delo modelo $p(t + 1) = \varphi - \theta p(t)e^{-bp(t)}$ sin control.

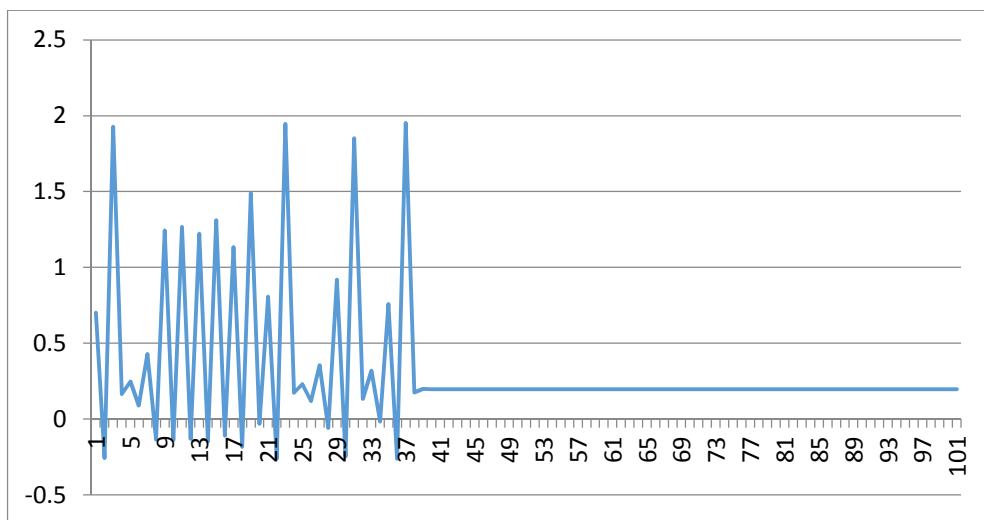


Figura 5.33. Solución del modelo $p(t + 1) = \varphi - \theta p(t)e^{-bp(t)}$ con control.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

La principal conclusión de esta tesis es que el caos se puede controlar, y que dicho control toma la forma de reglas o leyes de control que se asemejan a las reglas de política económica tipo Taylor (1993). Estas reglas de control además no resultan de los supuestos doctrinales que incorpore el modelo económico subyacente, sino de la Teoría moderna del Control del Caos, y por tanto son aplicables a cualquier modelo con el que se represente la dinámica de la economía.

El estudio de sistemas dinámicos no lineales busca mejorar nuestra comprensión de los fenómenos económicos al proporcionar una explicación endógena a la irregularidad, aperiodicidad y aparente aleatoriedad de las trayectorias temporales seguidas por la mayoría de las variables económicas. Dos de las aplicaciones de esta matemática del caso son, en primer lugar, la de mejorar las predicciones sobre su comportamiento futuro, al menos en el corto plazo; y en segundo lugar la de ejercer control sobre la evolución del sistema de forma que se estabilicen esas trayectorias caóticas.

El presente trabajo ha explorado la posibilidad de aplicar técnicas de control de sistemas dinámicos caóticos a la economía con el fin de establecer su capacidad para estabilizar las fluctuaciones presentes en las variables económicas y poder derivar de estas técnicas reglas de política monetaria.

En economía observamos que la mayoría de las variables muestran fluctuaciones aperiódicas, que pueden ser de baja frecuencia, como las observadas en las variables reales y los ciclos económicos recurrentes, o de alta frecuencia, como las fluctuaciones observadas de las series temporales de los mercados financieros. La teoría de control tendrá como objetivo suprimir estas oscilaciones y hacer que un sistema dinámico, en nuestro caso, un sistema dinámico económico, se comporte de una manera predeterminada, típicamente alcanzando un estado estacionario (punto fijo) considerado como objetivo.

La aplicación de técnicas de control en dinámica económica no es nueva, desde los años 50 encontramos estudios que exploran posibilidades de aplicación a modelos económicos y se avanza actualmente hacia el control de sistemas dinámicos caóticos. Para abordar la aplicación de técnicas de control del caos a la economía esta tesis partió de exponer los fundamentos de la matemática del caos. En este apartado se expusieron conceptos y herramientas matemáticas que dan sustento a la teoría de los sistemas dinámicos caóticos. Su aplicación en economía ha abarcado la elaboración de modelos que presentan comportamiento caótico y la aplicación de test de caos a series temporales económicas.

Aunque los trabajos que han buscado detectar comportamiento caótico en series temporales no han arrojado evidencia concluyente, sí han mostrado la existencia de no linealidad en los procesos subyacentes generadores de las series. Así, aunque no podemos afirmar que la economía es caótica, la presencia de no linealidad podría ampliar los límites de la teoría económica tradicional para la explicación de comportamientos como fluctuaciones irregulares con apariencia de aleatoriedad, inestabilidad, crisis, depresiones, burbujas, etc., fenómenos que podrían estar causados por factores endógenos del sistema y no por choques aleatorios exógenos.

Si buscamos las diferencias entre sistemas dinámicos lineales y no lineales notaremos que los sistemas no lineales tienen un comportamiento

considerablemente más rico y más complejo que el de los sistemas lineales, por ejemplo, estos últimos tienen propiedades simples como:

- Un único estado de equilibrio que será de tipo punto fijo;
- El punto de equilibrio será estable si todos los valores propios de la matriz Jacobiana del sistema tienen parte real negativa, independientemente de las condiciones iniciales;
- La solución general puede ser resuelta analíticamente.
- El sistema satisface el principio de superposición.

Por su parte, los sistemas no lineales tendrán propiedades como:

- Múltiples puntos de equilibrio;
- La estabilidad dependerá también de las condiciones iniciales de las cuales parta el sistema; en un sistema lineal o linealizado, para cualquier condición inicial, el movimiento siempre converge al punto de equilibrio;
- Muestran oscilaciones sin perturbaciones externas.
- Presentan cambios cualitativos en las propiedades del sistema al variar los valores de los parámetros;
- No siguen el principio de superposición ya que el todo es algo más que la suma de sus partes;
- En muy pocos casos es posible su solución analítica;
- Pueden dar lugar a comportamiento caótico.

Si consideramos que la economía es un fenómeno donde existen múltiples interacciones entre agentes económicos, no es posible seguir considerando que el modelado lineal sea el adecuado para explicar los resultados de estas múltiples interacciones. Podemos concluir, por tanto, que es necesario considerar las herramientas provenientes de la teoría de los sistemas dinámicos caóticos para acercarnos a una explicación más realista de la economía.

Una consecuencia del principio de superposición, que se aplica a los modelos lineales, es que están limitados para comprender y predecir el comportamiento total de un sistema a partir del conocimiento de cada una de sus partes; así, una consecuencia del principio de superposición para la política económica, es que llevaría a establecer políticas económicas erradas e inadecuadas, puesto que se carece de la comprensión de la economía como un todo. En la práctica, estaríamos hablando de la aplicación de políticas que benefician a algunas partes del conjunto de la sociedad pero no a la sociedad en su conjunto.

Las autoridades económicas basan sus previsiones en modelos económicos que describen de forma aproximada la realidad económica; una política incorrecta puede ser el resultado, por tanto, de modelos poco realistas, con resultados contrarios a la política planeada; en este sentido, las recomendaciones de política deberían estar basadas en modelos que tengan en cuenta las interacciones de los múltiples agentes de la economía, es decir, estar hechas con base en modelos dinámicos no lineales. El uso de modelos no lineales puede mejorar, por tanto, la comprensión del funcionamiento real de los fenómenos económicos.

Las características de los sistemas dinámicos caóticos también permiten su control. Por ello, un segundo aspecto que se trató en esta tesis fue el correspondiente a los fundamentos de control de sistemas dinámicos. Un sistema dinámico caótico podrá ser llevado a un estado deseado haciendo leves perturbaciones en alguno de los parámetros del sistema y así, de forma paradójica, el caos puede ser controlado.

En los sistemas no caóticos el efecto de una entrada sobre la salida suele ser proporcional. En los sistemas caóticos, el efecto de una entrada sobre la salida es exponencial debido a la sensibilidad a las condiciones iniciales. Esto hace la diferencia entre el control convencional y el control de sistemas dinámicos caóticos, ya que en éstos últimos, haciendo leves variaciones en el parámetro de control (o entrada), se puede llevar un sistema a un estado

predeterminado haciendo leves cambios en el valor de algún de sus parámetros.

Desde la perspectiva del control, los sistemas dinámicos caóticos presentan algunas ventajas; por ejemplo, es posible mejorar el funcionamiento del sistema aplicando sólo pequeños cambios. Así mismo, permite elegir una entre varias órbitas para ser estabilizada sin cambiar las propiedades inherentes del sistema dinámico o interferir con sus propiedades. En economía, esto significa que las autoridades económicas podrán hacer cambios leves a un instrumento de control para lograr un objetivo específico de política económica en comparación con las técnicas tradicionales de la teoría del control. Así mismo, se podrá mejorar la eficiencia de la política económica pues los instrumentos sólo necesitarán de ajustes leves para lograr estabilizar los objetivos finales en sus valores deseados.

Los diagramas de bifurcación son especialmente importantes en la Teoría del Control; con ellos se puede examinar el valor crítico del parámetro en el cual se presenta el cambio de estabilidad, es decir, buscan establecer el rango para el cual los parámetros de los modelos cambian el comportamiento dinámico de las soluciones de estable a inestable.

Por tanto, la dinámica caótica ofrece una nueva perspectiva en las estrategias de control de sistemas con resultados importantes para la política económica, esto es, pone a disposición de las autoridades nuevas herramientas de análisis que permiten cambiar el comportamiento asintótico del atractor del sistema caótico sin cambiar sus propiedades inherentes. Así, cuando las fluctuaciones de la actividad económica sean contraproducentes para el logro del objetivo de bienestar social, la política económica buscará manipular el atractor para estabilizar tales fluctuaciones.

El método OGY de control del caos, empleado en esta tesis, fue el trabajo seminal que abrió un nuevo campo de investigación en dinámica caótica y a partir de él, surgió un creciente número de trabajos de desarrollo y de aplicación en diversos campos de la ciencia, al cual no ha sido ajena la

economía. Como se ha mencionado, el hecho de cambiar el tipo de equilibrio dinámico en el cual se estabiliza un sistema haciendo leves variaciones en el parámetro de control, permite que las autoridades de política puedan manipular los instrumentos a su disposición para lograr sus objetivos estabilizadores, esto es, eliminar o suavizar las fluctuaciones de las variables objetivo y llevarlas a sus valores meta, además de servir de instrumento para el diseño de reglas de política.

La técnica OGY de control del caos busca estabilizar órbitas periódicas inestables de un atractor caótico. El método parte de elegir una de estas orbitas correspondientes al comportamiento dinámico deseado (típicamente un punto fijo estacionario), para luego aplicar pequeños ajustes en el parámetro de control con lo cual se llevará al sistema a desempeñarse de la forma predeterminada.

Lo significativo de este procedimiento, y que deriva en una consecuencia importante para la política económica de estabilización es, precisamente, que un atractor extraño, al estar compuesto por infinitas órbitas periódicas inestables, permite a los *policy makers* estabilizar la economía en cualquiera de esas orbitas inestables, es decir, elegir entre muchos comportamientos que correspondan con el desempeño deseado. El diseño de la regla de política se hará, entonces, para cada elección particular de la órbita periódica elegida.

El siguiente apartado de esta tesis trata de vincular esta teoría del control con las reglas de política económica, y, debido a su mayor profusión en el campo de la política monetaria, más concretamente con las reglas de política monetaria. A través del empleo de reglas, la política monetaria tiene como objetivo lograr que la inflación sea igual a una meta de inflación dada y, a la vez, obtener un buen intercambio entre la variabilidad de la inflación y la variabilidad de la brecha de producción o *output gap*. Una de las reglas más estudiadas en política monetaria ha sido la regla de Taylor(1993) dada su capacidad para estabilizar la economía alrededor de una meta. Específicamente, las autoridades monetarias, conducen su política con base

en la regla de Taylor, para reducir (aumentar) de forma automática la cantidad de dinero de la economía cuando la inflación o el output gap se encuentran por encima (debajo) de su objetivo y emplean como instrumento de control la tasa de interés nominal de corto plazo.

La estabilización de una variable alrededor de una meta es uno de los objetivos que persigue la teoría del control y la forma con la cual se estabiliza es empleando realimentación entre los valores meta (o valores deseados) para un variable y los valores actuales de esa variable, de forma que, usando un instrumento de control, éste haga que la diferencia entre los dos valores sea cada vez menor. Es precisamente este mecanismo de realimentación el que está detrás de las reglas de política tipo Taylor y que lleva a que la inflación y el output gap sean estabilizados en sus valores meta usando la tasa de interés nominal como instrumento de control.

En esta tesis hemos otorgado una fundamentación al uso de las reglas tipo Taylor a través de la teoría moderna del control de los sistemas caóticos. En efecto, a capacidad de la regla de Taylor o de sus variantes para estabilizar la inflación y la producción alrededor de unos valores de equilibrio, ha llevado a muchos países a adoptarla como norma de conducción de la política monetaria. Sin embargo, la regla de Taylor carece de una fundamentación teórica ya que ha sido desarrollada de forma empírica para dar una guía a los bancos centrales sobre la fijación de la tasa de interés. En este sentido, Cochrane (2007, p. 3) afirma que “la famosa ‘regla’ de Taylor (1993) fue en realidad una observación empírica sobre el comportamiento de los bancos centrales. En esta tesis defendemos que la teoría del control supone el sustento teórico de la regla de Taylor, ya que adoptan formalmente la misma formulación que la propuesta por esta teoría moderna del control de sistemas caóticos en lazo cerrado, y que por tanto podría utilizarse dicha teoría del control para profundizar en este tipo de reglas de control aplicadas a la política monetaria.

Así, en el apartado final de esta tesis se exponen cuatro modelos económicos que presentan comportamiento caótico y con los cuales se

ejemplifica la aplicación del método OGY de estabilización de trayectorias caóticas. Es importante resaltar que cualquier sistema dinámico, lineal o no lineal, puede ser llevado a un estado deseado o predeterminado aplicando las técnicas provenientes de la teoría del control del caos; estas técnicas, y el método empleado en esta tesis, no se desarrollaron para modelos específicos sino que, cualquier modelo dinámico que sea susceptible de ser descrito en el espacio de estados y que cumpla con la condición de controlabilidad, podrá ser llevado a un estado deseado, por tanto, cualquier modelo económico que cumpla con estas condiciones podrá ser controlado independientemente de los supuestos doctrinales que incorpore.

En los ejemplos que se muestran en el capítulo 5 de la tesis se retoma el concepto de control como el procedimiento por el cual se busca que una variable controlada y tome un valor deseado y^* por medio de ajustes en el valor de una variable de control u . Podemos asimilar una política de estabilización con un proceso de control que logra que la economía tenga un comportamiento deseado. Tal proceso de control se conduce a través de reglas de política que emplean realimentación negativa entre un valor deseado y un valor observado y que conduce, finalmente, al logro del valor meta para la variable objetivo. Este hecho lo verificamos controlando los cuatro modelos teóricos que presentaban soluciones caóticas. A cada uno de estos modelos se le aplicó el método OGY de control del caos y logramos el objetivo de estabilización, esto es, que la variable controlada tomara un valor deseado o predeterminado.

En todos estos ejemplos se obtiene una regla de control similar a la regla de Taylor en la que la oferta monetaria debe ser expansiva cuando la tasa de paro está por encima de la tasa de paro objetivo; y contractiva cuando la inflación está por encima de la objetivo. Una de las aportaciones de esta tesis es precisamente la de mostrar cómo los métodos de control del caos sirven para deducir de manera óptima la intensidad y el sentido de la intervención de la política monetaria en estas reglas de política monetaria tipo Taylor

Empezamos controlando el modelo de Futoma y Southworth (2011) para una economía monetaria. La derivación del modelo conduce a la ecuación logística, que ha sido ampliamente estudiada y que da lugar a soluciones periódicas y caóticas. En este caso, el parámetro de control corresponde a la tasa de crecimiento de la oferta de dinero y sus variaciones harán que los precios se estabilicen en diferentes tipos de equilibrio. La aplicación de la regla de control derivada para este modelo, llevó a la estabilización de los precios en una órbita de periodo uno.

Seguidamente se controlan dos versiones del modelo monetario de inflación y desempleo de Soliman (1996a,b). Los modelos se diferencian por la especificación de la forma funcional usada para describir la curva de Phillips, esto es, la relación no lineal entre inflación y desempleo; siguiendo al autor, los modelos se denominaron, modelo empírico y modelo exponencial. En ambas versiones observamos que, para ciertos valores críticos de los parámetros, el punto de equilibrio inflación-desempleo perdía su estabilidad dando lugar a un comportamiento cíclico regular y posteriormente, a su estabilización en un atractor caótico.

La estabilidad del sistema inflación-desempleo está determinada por los valores propios de la matriz Jacobiana del sistema, esto es, los valores propios deberán ser, en módulo, menores que la unidad. La pérdida de estabilidad se presenta cuando al variar el parámetro de control, en este caso, la tasa de crecimiento de la oferta monetaria, el sistema sigue la dirección de inestabilidad del punto de equilibrio y el sistema se estabiliza en un nuevo equilibrio dinámico. Por tanto, ante aumentos en el crecimiento de la oferta monetaria, la relación inflación y desempleo pierde su estabilidad, pasando a un comportamiento cíclico y finalmente converge en un movimiento irregular dentro del atractor caótico. La variación del crecimiento de la oferta monetaria lleva entonces a cambiar el comportamiento dinámico del sistema.

Usando la tasa de crecimiento de la oferta monetaria como parámetro de control, se logró que en ambos modelos, el sistema inflación-desempleo

siguiera la dirección estable del punto de equilibrio y permaneciera en dicho punto por el tiempo que dura el control. En términos de política monetaria diremos que, aplicando la regla de control derivada en cada modelo, llevamos al sistema a un equilibrio estable y permanente con la inflación y desempleo controlados por la autoridad monetaria.

El último modelo en ser controlado es el desarrollado por Punita (2011); este modelo de hiperinflación muestra el proceso de evolución de los precios que da lugar a distintos patrones de comportamiento dependiendo del valor del parámetro θ (ratio entre precios y oferta monetaria). Se observó que para distintos valores del parámetro, los precios perdían su estabilidad, pasando de un comportamiento estable y regular, a oscilar y, posteriormente, exhibían comportamiento caótico. El objetivo de control fue, por tanto, estabilizar la dinámica de los precios en un punto fijo del sistema.

A modo de resumen, podemos resaltar de estas conclusiones que:

- I) Los sistemas dinámicos caóticos presentan fluctuaciones irregulares cuando se estabilizan en un atractor extraño y esta irregularidad no es causada por factores exógenos sino por la realimentación no lineal de las variables del sistema, es decir, por factores endógenos. La teoría del control del caos propone métodos para tratar de suprimir este comportamiento caótico haciendo que la trayectoria que recorre de manera irregular cada uno de los estados de equilibrio dinámico inestables que se encuentran dentro del atractor se estabilice en uno de ellos y permanezca allí.
- II) La economía puede ser influida por políticas que mejoren su desempeño, por tanto la aplicación de política económica, en nuestro caso, política monetaria, puede ser vista como la solución de un problema de control, es decir, teniendo como objetivo de control la estabilización de la inflación y la producción, los bancos

centrales fijarán las tasas de interés siguiendo la regla de Taylor como regla de control.

- III) Las reglas de política monetaria son reglas realimentadas y la realimentación tiene un papel decisivo en los procesos de estabilización ya que actúa regulando la interacción entre dos variables cuya actividad está vinculada. La realimentación negativa controla, mientras que la realimentación positiva amplifica los efectos de una variable sobre la otra.
- IV) La política económica emplea realimentación negativa a través de reglas que estabilizan o neutralizan posibles estados caóticos de la economía como burbujas, hiperinflación, etc.
- V) Aplicando los métodos de control del caos podemos esperar que éstos sean una forma de mejorar la eficacia de las acciones de las autoridades económicas en la búsqueda de la estabilización de las variables económicas.

Como hemos mencionado con anterioridad, no existen pruebas concluyentes de caos en las series temporales, sin embargo, la dependencia no lineal observada en las series que han sido estudiadas para la economía podría explicar la aparición de comportamientos no regulares como los observados en las variables económicas sin que tal irregularidad sea causada necesariamente por factores exógenos. En este sentido, son muchos los modelos teóricos que muestran que la economía puede presentar comportamientos dinámicos caóticos sin necesidad de forzar los supuestos de los modelos. Es decir, que con una alta plausibilidad económica, al menos desde el punto de vista teórico, es muy fácil encontrar caos en la dinámica económica.

Sin embargo, como hemos comentado, son pocos los trabajos que detectan este tipo de comportamiento caótico en las series económicas. Es lo que puede denominarse como **la paradoja del caos** según la cual, aunque

resulta teóricamente posible construir modelos económicamente plausibles que describan soluciones en régimen de comportamiento caótico, no existe una evidencia empírica clara a favor del caos determinista en las series económicas.

En esta tesis se proporciona una explicación a esta paradoja del caos. En efecto, en esta tesis hemos mostrado como las reglas de política económica como las reglas de Taylor se asemejan a las reglas de control que se derivan de la Teoría del control del Caos. En la medida, por tanto, en que estas reglas tipo Taylor se estén aplicando de alguna u otra manera en las economías reales, se estará de hecho estabilizando la dinámica de las variables económicas, y por tal motivo no será posible detectar comportamientos caóticos en las series temporales reales. Dicho de otra forma, una posible explicación a la no detección de caos en las series temporales es simplemente que el uso de este tipo de reglas están estabilizando el comportamiento caótico que de otra forma regiría la dinámica de las economías.

Esto es, podemos afirmar que la economía podría estar comportándose de manera caótica en ausencia de una política de estabilización. Es perfectamente asumible que la economía se pueda considerar como inherentemente inestable y por tanto con oscilaciones endógenas, oscilaciones que están siendo controladas por las autoridades económicas usando reglas realimentadas, tal como la regla de Taylor.

Esta tesis abre diferentes líneas de investigación:

- ¿Varían sustancialmente las reglas de control cuando se aplican a modelos que incorporan incertidumbre, y retardos en los efectos de la política económica o agentes racionales capaces de avanzar el comportamiento de estas reglas de control?
- ¿Es posible obtener de reglas de control óptimas a partir de series temporales, es decir, sin que se sepa cual es el modelo subyacente generador de las series temporales?

Esperamos en el futuro poder profundizar en estas y otras líneas de investigación y poder avanzar así en el conocimiento de la Ciencia Económica

BIBLIOGRAFIA

Abarbanel, H. (1996). *Analysis of observed chaotic data*. Nueva York: Springer-Verlag.

Acocella, N., Di Bartolomeo, G., & Hughes, A. (2007). Dynamic controllability with overlapping targets: or why target Independence may not be good for you. *Macroeconomic Dynamics*, Vol. 11.

Acocella, N., & Di Bartolomeo, G. (2008). Towards a new theory of economic policy: continuity and innovation. En: Neck, R., Richter, C., & Mooslechner, P. (Eds), *Quantitative Economic Policy. Essays in Honour of Andrew Hughes Hallet*. Berlin: Springer.

Ahmed, E., El-Misieri, A., & Agiza, H. (1999). On controlling chaos in an inflation-unemployment dynamical system. *Chaos, Solitons and Fractals*. No. 9.

Ahmed, E., & Hassan, S. (2000). Controlling chaos in cournot games with two and three competitors. *Nonlinear Dynamics Psychology and Life Sciences*. Vol. 4, No. 2.

Airaudo, M., & Zanna, L. (2012). Interest rate rules, endogenous cycles and chaotic dynamics in open economies. *Journal of Economic Dynamics & Control*. No. 36.

Alligood, K.T.; Sauer, T.D. y Yorke, J. A. (1997). *Chaos. An introduction to Dynamical Systems*. Nueva York: Springer

- Alonso González, L., & Palacio Vera, A. (1999). Monetary policy, Taylor's Rule and Endogenous Fluctuations. *Documento de trabajo de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales*, No. 19.
- Allen, R.G.D. (1967). *Macro-Economic Theory. A Mathematical Treatment*. Londres: Macmillan.
- Andrievskii, B., & Fradkov, A. (2003). Control of Chaos: methods and applications. II. Applications. *Automation and Remote Control*. Vol. 64, No. 5.
- Aoki, M., & Canzoneri, M. (1979). Sufficient conditions for control of target variables and assignment of instruments in dynamic macroeconomic models. *International Economic Review*. Vol. 20, No. 3.
- Ashley, R., & Patterson, D. (1989). Linear vs. nonlinear macroeconomics: a statistical test. *International Economic Review*. Vol. 30, No. 3.
- Asso, F., Kahn, G., & Leeson, R. (2007). Monetary policy rules: from Adam Smith to Taylor. *Taylor Rule conference*, Dallas Fed, octubre.
- Aström, K., & Murray, R. (2008). *Feedback Systems*. Princeton: Princeton University Press.
- Athans, M., & Kendrick, D. (1974). Control theory and economics: A survey, forecast, and speculations. *IEEE Transactions on Automatic Control*. Control theory and economics: A survey, forecast, and speculations. Vol. 19. No. 5.
- Bagehot, W. (1873). *Lombard Street: A Description of the Money Market*. Londres: P.S. King.
- Bain, K., & Howells, P. (2003). *Monetary economics. Theory and its theoretical basis*. Nueva York: Palgrave Macmillan.

- Baker, G., & Gollub, J. (1990). *Chaotic dynamics*. Estados Unidos: Cambridge University Press.
- Bala, V., Majumdar, M., & Mitra, T. (1998). A note on controlling chaotic tatonnement. *Journal of economic behavior and organization*. Vol. 33.
- Ball, L. (1999). Policy rules for open economies. En: Taylor, J. (Ed). *Monetary policy rules*. Chicago: University of Chicago Press.
- Banks, J., Brooks, J., Cairns, G., Davies, G., & Stacey, P. (1992). On Devaney's Definition of Chaos. *The American Mathematical Monthly*. Vol. 99, No. 4.
- Barbolla, R. y Gómez, J. (1987). Control de sistemas macroeconómicos. Estudio de un caso para la economía española. *Investigaciones económicas (segunda época)*. Vol. 11, No. 1.
- Barcellos, A. (1984). The fractal geometry of Mandelbrot. *The College Mathematics Journal*. Vol. 15, No. 2.
- Barnett, W., & He, Y. (2002). Stabilization policy as a bifurcation selection: would stabilization policy work if the economy really were unstable?. *Macroeconomic dynamics*. No. 6.
- Barro, R., & Gordon, D. (1983). A Positive Theory of Monetary Policy in a Natural Rate Model. *Journal of Political Economy*. Vol. 91. No. 4.
- Batini, N., & Haldane, A. (1999). Forward-Looking rules for monetary policy. En: Taylor, J. (Ed). *Monetary policy rules*. Chicago: University of Chicago Press.

- Baumol, W., & Benhabib, J. (1989). Chaos: significance, mechanisms and economic applications. *The Journal of Economic Perspectives*. Vol. 3, No. 1.
- Bean, Ch. R. (1983). Targeting nominal income: an appraisal. *Economic Journal*. Vol. 93. United Kingdom: Blackwell Publishing.
- Bernanke, B., & Rotemberg, J. (1997). The new neoclassical synthesis and the role of monetary policy. *NBER Macroeconomics Annual*. Vol. 12.
- Bernanke, B., & Mishkin, S. (1997). Inflation Targeting: A new framework for monetary policy?. *The Journal of Economic Perspectives*. Vol. 11, No.2.
- Bernanke, B., Laubach, T., Mishkin, S., & Posen, A. (2001). *Inflation Targeting*. New Jersey: Princeton University Press.
- Bernholz, P. (2003). *Monetary regimes and inflation*. Estados Unidos: Edward Elgar.
- Bertuglia, C., & Vaio, F. (2005). *Nonlinearity, chaos and complexity*. Estados Unidos: Oxford University Press.
- Biederman, D. (2002). Stabilizing properties of monetary feedback rules: a representative-agent approach. *Journal of Economic Dynamics and Control*. No. 26.
- Bindseil, U. (2004). *Monetary policy implementation*. Oxford: Oxford University Press.
- Blanchard, O.J. y Ficher, S. (1989). *Lectures on Macroeconomics*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press

- Boccaletti, S., Grebogi, C., Lai, Y-C., Mancini, H., & Maza, D. (2000). The control of chaos: theory and applications. *Physics Reports*. No. 329.
- Brainman, Y., & Goldhirsch, I. (1991). Taming chaotic dynamics with weak periodic perturbations. *Physics Review Letters*. No. 68.
- Brito, D., & Hester, D. (1974). Stability and control of the money supply. *Quarterly Journal of Economics*. Vol. 88, No. 2.
- Briggs, J., & Peat, F. (1989). *Espejo y reflejo: del caos al orden*. España: Gedisa.
- Bullard, J., & Butler, A. (1993). Nonlinearity and chaos in economic models: implications for policy decisions. *The Economic Journal*. No. 103.
- Bullard, J., & Mitra, K. (2002). Learning about monetary policy rules. *Journal of Monetary Economics*. Vol. 49.
- Buiter, W. (1989). *Macroeconomic theory and stabilization policy*. Gran Bretaña: Manchester University Press.
- Caballero, R., Gómez, T., González, M., Miguel, F., Muñoz, M., Rey, L., & Ruiz, F. (1998). *Análisis dinámico para economistas*. Andalucía: Publicaciones e intercambio científico de la Universidad de Málaga.
- Cagan, P. (1956). The monetary dynamics of hyperinflation. En: Friedman, M (Ed), *Studies in the quantity theory of money*. Estados Unidos: The University of Chicago Press.
- Cantor, G. (1884). On the power of perfect sets of points. *Acta Mathematica*. No. 4.
- Casaubon, J. (2001). Control del caos usando la estrategia OGY. *Ciencia al Día*. Vol. 4, No.2.

- Castañeda, J. (2004). Una aproximación al alcance y limitaciones de la Regla de Taylor: aplicación al caso del Banco Central Europeo. VII Encuentro de Economía Aplicada. Vigo, junio de 2004.
- Cecchetti, S. (2000). Making monetary policy: objectives and rules. *Oxford Review of Economic Policy*. Vol. 16, No. 4.
- Chappell, D. (1997). Chaotic behavior in a simple model of inflation. *The Manchester School*. Vol. 65, No. 3.
- Chau, N. (1997). Controlling chaos by periodic proportional pulses. *Physics Letters A*. No. 234.
- Chiang, A.C. (1987). *Métodos fundamentales de economía matemática*. México: McGraw Hill.
- Chen, L., & Chen, G. (2007). Controlling chaos in an economic model. *Physica A*. No. 374.
- Chen, G., & Dong, X. (1993). Control of Chaos. A survey. *IEEE Transactions on Circuits and Systems. Preceedings of the 32nd Conference on Decision and Control*. San Antonio, Texas.
- Cellier, F., & Kofman, E. (2006). *Continuous System Simulation*. New York: Springer-Verlag.
- Clarida, R., Galí, J., & Gertler, M. (1998). Monetary policy rules in practice: some international evidence. *European Economic Review*. Vol. 42.
- Clarida, R., Galí, J., & Gertler, M. (1999). The science of monetary policy: a New Keynesian perspective. *Journal of Economic Literature*. Vol. 37, No. 4.

- Clarida, R., Galí, J., & Gertler, M. (2000). Monetary policy rules and macroeconomic stability: evidence and some theory. *Quarterly Journal of Economics*. Vol. 115.
- Cochrane, J. (2007). Inflation determination with Taylor rules: a critical review. *NBER Working Papers w13409*.
- Craine, R., Havenner, A., & Berry, J. (1978). Fixed rules vs. activism in the conduct of monetary policy. *The American Economic Review*, Vol. 68, No. 5.
- Day, R. (1994). *Complex Economic Dynamics*. Vol. 1. Cambridge: The MIT Press.
- Davies, B. (2004). *Exploring Chaos*. Estados Unidos: Westview Press.
- Davig, T., & Leeper, E. (2007). Generalizing the Taylor principle. *The American Economic Review*. Vol. 97, No. 3.
- DeCoster, G., & Mitchell, D. (1991). Nonlinear Monetary Dynamics. *Journal of Business & Economic Statics*. Vol. 9, No. 4.
- Derrida, B., Gervois, A., & Pomeau, Y. (1979). Universal metric properties of bifurcations of endomorphisms. *Journal of Physics A: Mathematical and General*. Vol.12, No 3.
- Devaney, R. (1989). *An Introduction to chaotical dynamical systems*. Estados Unidos: Addison-Wesley.
- Devaney, R. (1992). *A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiments*. Estados Unidos: Addison-Wesley.

- Díaz Roldán, C., & Montero Soler, A (2004). Las reglas de política monetaria en la actuación del Banco de España: 1978-1998. *Revista de Economía Aplicada*. Vol.12, No. 34
- Ditto, W., Rauseo, S., & Spano, M. (1990). Experimental control of chaos. *Physical Review Letters*. Vol. 65, No 26.
- Ditto, W., Spano, M., & Lindner, J. (1995). Techniques for the control of chaos. *Physica D*. No. 86.
- Dorf, R. (1989). *Sistemas modernos de control*. Estados Unidos: Addison-Wesley
- Dorsey, J. (2005). *Sistemas de control continuos y discretos*. México: McGraw-Hill.
- Epureanu, B., & Dowell, E. (1998). On the optimality of the Ott-Grebogi-Yorke control scheme. *Physica D*. No. 116.
- Erias, A., & Sánchez, J.M. (1998). *Política monetaria y política fiscal*. España: Pirámide.
- Escot, L. (1997). Introducción a la teoría del caos: una aplicación al estudio del ciclo y el crecimiento económico. *Anuario jurídico económico escurialense*. Época II. No XXX.
- Escot, L. (2000). *Dinámica económica caótica: Una aplicación al estudio del ciclo y el crecimiento económico*. (Tesis Doctoral). Universidad Complutense de Madrid. Facultad de Ciencias Económicas y empresariales. España.
- Fanti, L., & Manfredi, P. (2007). Neoclassical labour market dynamics, chaos and the real wage Phillips curve. *Journal of Economic Behavior & Organization*. Vol. 62.

- Falconer, K. (1990). *Fractal Geometry: mathematical foundations and applications*. Inglaterra: John Wiley & Sons.
- Fernández Díaz, A. (1989). *Curso de política económica*. Madrid: AC.
- Fernández Díaz, A. (1994). *La economía de la complejidad*. Madrid: McGraw-Hill.
- Fernández Díaz, A. (1996). Dinámica caótica y política económica. *Información comercial española*. No 753.
- Fernández Díaz, A., Rodríguez Sáiz, L., Parejo Gámir, J., Galindo, M.A., & Calvo, M.A. (1991). *Teoría y política monetaria*. Madrid: AC.
- Fernández Díaz, A., Parejo Gámir, J., & Rodríguez Sáiz, L. (1999). *Política Económica*. España: McGraw-Hill. (4ª edición revisada y actualizada de 2011)
- Fernández Díaz, A., & Escot, L. (1999). Ciclos y crecimiento económico: una reconsideración. En Fernández Díaz, A (Dir.), *Fundamentos y papel actual de la política económica*. España: Pirámide.
- Fernández Díaz, A. Escot, L. & Grau-Carles, P. (2012). What's new and useful about Chaos in Economic Science. *Cuadernos de Trabajo de la Escuela Universitaria de Estadística*, num. CT02/2012.
- Fernández Díaz, A., & Grau-Carles, P. (2014): *Dinámica Caótica en Economía (Teoría y Aplicaciones)*. España: Editorial Delta.
- Flynn, C., & Wilson, N. (1998). A simple method for controlling chaos. *American Association of Physics Teachers*. Vol. 66, No. 8.

- Fradkov, A., & Pogromsky, A. (1998). *Introduction to control of oscillations and chaos*. Singapur: World Scientific Publishing.
- Fradkov, A., & Evans, R. (2005). Control of chaos: methods and applications in engineering. *Annual Reviews in Control*. No. 29.
- Fradkov, A., Evans, R., & Andrievsky, B. (2006). Control of chaos: methods and applications in mechanics. *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. Vol. 364, No. 1846.
- Freedman, Ch. (2005). Goals and instruments of monetary policy. Past, present and future. En Mahadeva, L. y Sinclair, P. (Eds.), *How monetary policy works*. Estados Unidos: Routledge.
- Friedman, M. (1959). *A Program for Monetary Stability*. Nueva York: Fordham University Press.
- Friedman, M. (1968). The role of monetary policy. *American Economic Review*. Vol. 58, No 1.
- Futoma, J., & Southworth, B. (2011). Discrete chaotic dynamical systems in economic models. (Recuperado de: <http://www.math.dartmouth.edu/~m53f11/proj/FutomaSouthworth.pdf>)
- Gandolfo, G. (2009). *Economic Dynamics*. Berlín: Springer-Verlag
- Gerlach, S., & Schnabel, G. (2000). The Taylor rule and interest rate in the EMU area. *Economic Letters*. No. 67.
- Gimeno, R. (2000). *Análisis caótico de series temporales financieras de alta frecuencia. El contrato de futuro sobre el bono nacional a 10 años*. (Tesis doctoral). Universidad Pontificia Comillas de Madrid, Facultad de Ciencias Económicas y empresariales, España.

- Gleick, J. (1998). *Caos, la creación de una nueva ciencia*. España: Seix Barral.
- Grantham, W.J., & Athalye, A.M; (1989). Discretization chaos: feedback control and transition to chaos. *Control and Dynamic Systems*. Vol. 34.
- Grassberger, P., & Procaccia, I. (1983). Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica* 9D.
- Grau-Carles, P. (1996). *Economía dinámica caótica: una aplicación al mercado de capitales*. (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, España.
- Gomis-Porqueras, P., & Haro, A. (2007). Global bifurcations, credit rationing and recurrent hyperinflations. *Journal of Economic Dynamics and Control*. No. 31.
- Güemez, J., & Matías, M. (1993). Control of chaos in unidimensional maps. *Physics Letters A*. No. 181.
- Guzmán, M., Martín, M., Morán, M., & Reyes, M. (1993). *Estructuras fractales y sus aplicaciones*. Barcelona: Labor S.A.
- Haag, G., Hagel, T., & Sigg, T. (1997). Active stabilization of a chaotic urban system. *Discrete Dynamics in Nature and Society*. No.1.
- Hayek, F. A. (1931). *Prices and Production*. Estados Unidos: Augustus M. Kelly Publishers.
- Hayes, B. (2011). Economics, control theory and the Phillips machine. *Economía Política*. No. 28.
- Hénon, M. (1976). A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Communications in Mathematical Physics*. Vol. 50, No. 1.

- Hillborn, R. (1994). *Chaos and Nonlinear Dynamics*. Oxford: Oxford University Press.
- Holyst, J., Hagel, T., Haag, G. & Weidlich, W. (1996). How to control a chaotic economy?. *Journal of Evolutionary Economics*. No. 6.
- Holyst, J., Hagel, T. & Haag, G. (1997). Destructive rol of competition and noise of microeconomics chaos. *Chaos, Solitons and Fractals*. No.7.
- Holyst, J., & Urbanowicz, K. (2000). Chaos control in economical model by time-delayed feedback method. *Physica A*. No. 287.
- Holyst, J., Zebrowska, M., & Urbanowicz, K. (2001). Observations of deterministic chaos in financial time series by recurrent plots. Can one control chaotic economy?. *The European Physical Journal B*. No. 20.
- Hong, Z., Jie, Y., Jiao, W., & Yinghai, W. (1996). General method of controlling chaos. *Physical Review A*. Vol. 53, No. 1.
- Hübler, A., Georgii, R., Kuckler, M., Stelzl, W., & Lüscher, E. (1988). Resonant stimulation of nonlinear damped oscillators by Poincaré maps. *Helvetica. Physica Acta* 61.
- Hübler, A., & Plapp, B. (1990). Nonlinear resonances and suppression of chaos in the rf-Biased Josephson Junction. *Physical Review Letter*. Vol. 65, No. 18.
- Hunt, E. R. (1991). Stabilizing high-period orbits in a chaotic system – The diode resonator. *Physics Review Letters*. No. 67.
- Isaza, J., & Campos, D. (2002). *Prolegómenos a los Sistemas Dinámicos*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

- Jacobs, O.L.R. (1974). *Introduction to control theory*. Gran Bretaña: Oxford University Press.
- Jagdish, H. (2009). *Monetary economics*. Estados Unidos: Routledge.
- Judd, J., & Motley, B. (1992). Controlling inflation with an interest rate interest. *Economic Review – Federal Reserve Bank of San Francisco*. No 3.
- Judd, J., & Rudebusch, G. (1998). Taylor's rules and the FED: 1970-1997. *Federal Reserve Bank of San Francisco Review*. No. 3.
- Kaas, L. (1998). Stailizing chaos in a dynamic macroeconomic model. *Journal of Economic Behaviour and Organization*. Vol. 33.
- Kapitaniak, T. (1996). *Controlloing Chaos*. Estados Unidos: Academic Press.
- Kendrick, D. (1988). *Feedback. A new framework for macroeconomic policy*. Holanda: Kluwer Academic Publishers.
- Kerpel, W. (1986). Aplicaciones de la teoría del control a la economía. *Ingeniería e Investigación*. Vol. 4, No. 1.
- Koch, H. (1906). Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes. *Acta Mathematica*. No. 30.
- Kopel, M. (1997). Improving the performance of an economic system: controlling chaos. *Journal of Evolutionary Economics*. No. 7.
- Kozicki, S. (1999). How useful are Taylor rules for monetary policy?. *Federal Reserve Bank of Kansas City Economic Review*, Segundo trimestre.

- Kydland, F., & Prescott, E. (1977). Rules Rather than Discretion: the Inconsistency of Optimal Plans. *Journal of Political Economy*. Vol. 85. No. 3.
- Lai, Y-C. (1994). Controlling Chaos. *Computer Simulations*. Vol. 8, No. 1.
- Lewis, M., & Mizen, P. (2000). *Monetary Economics*. Estados Unidos: Oxford University Press Inc.
- Li, T., & Yorke, J. (1975). Period Three Implies Chaos. *American Mathematical Monthly*. No. 82.
- Limpsey, R. G. (1960). The relation between unemployment and the rate of change of money wage rates in the United Kingdom, 1862-1957: a further analysis. *Economica*. Vol. 27, No. 105.
- Lorenz, E. (1963). Deterministic non periodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*. Vol. 20.
- Lorenz, H-W. (1993). *Nonlinear dynamical economics and chaotic motion*. Alemania: Springer-Verlag.
- Lynch, S. (2004). *Dynamical systems with applications using matlab*. Estados Unidos: Birkhäuser.
- Maas, W., & Nijmeijer, H. (1994). Dynamic path controllability in economics models. *Journal of Economics Dynamics and Control*. Vol. 18.
- Malthus, R. (1798). *An essay on the principle of population*. Oxford: Oxford World's Classics reprint.
- Mandelbrot, B. (1983). *The Fractal Geometry of Nature*. Estados Unidos: Henry Holt and Company.

- Mateos de Cabo, R. (2001). *Los indicadores de complejidad en economía: análisis y aplicaciones. Estudio de la dinámica competitiva entre sitios de internet*. (Tesis doctoral), Universidad San Pablo – CEU, España.
- Mateos de Cabo, R., & Olmedo, E. (2002). Implicaciones del caos determinista en la economía y la gestión empresarial. *Encuentros multidisciplinares*, No 11.
- Mateos de Cabo, R., & Valderas, J.M. (2004). La economía en el marco de la ciencia compleja. *Encuentros multidisciplinares*, No 17.
- Matías, M., & Güémez, J. (1994). Stabilization of chaos by proportional pulses in the system variables. *Physical Review Letters*. Vol. 72, No. 10.
- McCallum, B. (1981). Monetarist principles and the money stock growth rule. *The American Economic Review*. Vol. 71, No.2.
- McCallum, B. (1997). Issues in the design of monetary policy rules. *NBER Working Paper Series* 6016.
- McCallum, B. (1998). Robutness Properties of a rule for monetary policy. *Carnegie-Rochester Conferencie Series on Public Policy*. Vol. 29.
- Martelli, M., Dang, M., & Seph, T. (1998). Defining Chaos. *Mathematics Magazine*. Vol. 71, No. 2.
- Matsuyama, K. (1991). Endogenous price fluctuations in an optimizing model of a monetary economy. *Econometrica*. Vol. 59, No. 6.
- Medio, A. (1992). *Chaotic Dynamics. Theory and Applications to Economics*. Cambridge: University Press.

- Medio, A., & Lines, M. (2001). *Nonlinear Dynamics. A Primer*. Cambridge: University Press.
- Melcón, C. (1994). Estrategias directas de política monetaria basadas en el seguimiento directo de objetivos de inflación. *Boletín Económico-Banco de España*. No. 12.
- Mendes, V., & Mendes, D. (2008). Controlling endogenous cycles in an OLG economy by the OGY method. *ISCTE Lisbon University Institute Working Paper*, 08/08.
- Mishkin, F., & Schmidt-Hebbel, K. (2001). One decade of inflation targeting in the world: what do we know and what do we need to know?. *NBER working paper series No 8397*.
- Mishkin, F. (2002). The role of output stabilization in the conduct of monetary policy. *International Finance*. Vol. 5, No. 2.
- Mishkin, F. (2011). Monetary policy strategy: lessons from the crisis. *NBER Working Paper Series w16755*.
- Mulero, J. (2010). El papel de la realimentación en el control de sistemas dinámicos. *Revista de la ETSIT-Universidad Politécnica de Cartagena*. No.1.
- Neck, R. (2008). The contribution of control theory to the analysis of economic policy. *17th IFAC World Congress*. Seul, Julio 6-11.
- Neck, R. (2009). Control theory and economic policy: Balance and perspectives. *Annual Reviews in Control*. Vol. 33.
- Nelson, E. (2000). UK monetary policy 1972-1997: a guide using Taylor Rules. *Bank of England, Working Paper 120*.

- Nelson, E. (2008). Friedman and Taylor on monetary policy rules: a comparison. *Federal Reserve Bank of San Luis Review*. Vol.90, No.2.
- Nieto De Alba, U. (1998). *Historia del tiempo en economía. Predicción, caos y complejidad*. España: McGraw Hill.
- Obst, N. (1978). Stabilization policy with an inflation adjustment mechanism. *Quarterly Journal of Economics*. Vol. 92.
- Ogata, K. (1998). *Ingeniería de control moderna*. México: Prentice-Hall.
- Orphanides, A. (2010). Taylor rules. En: Darlauf, S., & Blume, L. (Eds). *Monetary economics*. Hampshire: Palgrave Macmillan.
- Ott, E., Grebogi, C., & Yorke, J. (1990). Controlling chaos. *Physical Review Letters*. Vol. 64, No 11.
- Páez-Farrell, J. (2009). Monetary policy rules in theory and in practice: evidence from de UK and the US. *Applied Economics*, No 41.
- Palacio Vera, A. (1997). *Ciclos económicos, mercado de trabajo y reglas de política monetaria*. (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Departamento de Economía Aplicada III, España.
- Patidar, V. (2006). Co-existence of regular and chaotic motions in the Gaussian Map. *Electronic Journal of Theoretical Physics*. Vol. 3, No. 13.
- Peng, B., Petrov, V., & Showalter, K. (1991). Controlling chemical chaos. *Journal of Physical Chemistry*. Vol. 95.

- Pettini, M. (1989). Controlling chaos through excitations. En: Lima, R., Streit, L., & Mendes, R. (Eds), *Dynamics and Stochastic Processes*. New-York: Springer-Verlag.
- Phillips, A. (1954). Stabilization policy in a closed economy. *Economic Journal*. Vol. 64.
- Phillips, Ch., & Harbor, R. (2000). *Feedback control systems*. Estados Unidos: Prentice-Hall.
- Pitchford, J., & Turnovsky, S. (Eds.). (1977). *Applications of Control Theory to Economics Analysis*. Nueva York: North-Holland.
- Prescott, E. (1977). Should control theory be used for economic stabilization?. *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*. Vol. 7, No. 1.
- Punita, R. (2011). Chaos models and the monetary dynamics of hyperinflation. *International Business and Economics Research Journal*. Vol 10, No 11.
- Pyragas, K. (1992). Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physics Letters A*. Vol. 170, No. 421.
- Rajasekar, S., & Lakshmanan, M. (1992). Controlling of chaos in Bonhoeffer-Van der Pol oscillator. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 02.
- Rañada, A. (1990). *Dinámica clásica*. Alianza Universidad. España: Editorial Textos.
- Ravier, A. (2008). Regla monetaria vs. discrecionalidad: una ampliación del debate. *Revista de Instituciones, Ideas y Mercados*. No. 4.

- Rega, G., Lenci, S., & Thompson, J. (2010). Controlling Chaos: The OGY Method, its use in mechanics, and an alternative unified framework for control of non-regular dynamics. En: Thiel, M., Kurths, J., Romano, M., Moura, A., & Karolyi, G. (Eds.), *Nonlinear dynamics and chaos: advances and perspectives*. Berlin: Springer-Verlag.
- Rennhack, R. (1991). La conducción de la política monetaria. *Cuadernos de Economía*. Año 28, No 83.
- Romera, M. (1997). *Técnica de los Sistemas Dinámicos Discretos*. Textos Universitarios No. 27. Madrid: CSIC
- Romeiras, F., Grebogi, C., Ott, E., y Dayawansa, W.P. (1992). Controlling chaotic dynamical systems. *Physics D*. Vol.58, No.165.
- Rössler (1976). An equation for continuous chaos. *Physics Letters*. Vol. 57A, No. 5.
- Sachs, J., & Larraín, F. (1994). *Macroeconomía en la economía global*. Prentice-Hall: México.
- Salarich, H., & Alasty, A. (2009). Chaos control in an economic model via minimum entropy strategy. *Chaos, Solitons and Fractals*. No. 40.
- Salter, A. W. (2014). An introduction to monetary policy rules. *Mercatus Working Paper*. Recuperado de: <https://mercatus.org/publication>
- San Juan, M., & Grebogi, C. (Eds.) (2010). Recent Progress in controlling chaos. *Series on Stability, Vibration and Control of Systems, Series B*. Vol. 16.
- Sargent, T., & Wallace, N. (1975). Rational expectations, the optimal monetary instrument, and the optimal money supply rule. *Journal of Political Economy*. Vol. 83.

- Santemero., A., & Seater, J. (1978). The inflation unemployment trade-off: a critique of the literature. *Journal of Economic Literature*. No 16.
- Santos, R., & Graves, J. (2010). Estimating chaos control parameters from time series. *International Conference on Chaos and Nonlinear Dynamics*. Sao José dos Campos (Brasil), Julio 26-30.
- Scheinkman, J. (1990). Nonlinearities in economic dynamics. *The economic Journal*. Vol. 100, No. 400.
- Shinbrot, T., Ott, E., Grebogi, C., & Yorke, J. (1990). Using chaos to direct trajectories to targets. *Physical Review Letters*. Vol. 65, No. 26.
- Shone, R. (2002). *Economic Dynamics*. Estados Unidos: Cambridge University Press.
- Simon, H.C. (1936). Rules versus authorities in monetary policy. *Journal of Political Economy*. No. 44.
- Solé, R., & Manrubia, S. (2001). *Orden y caos en sistemas complejos*. Barcelona: Ediciones Universidad Politécnica de Cataluña.
- Soliman, A.S. (1996a). Transitions from stable equilibrium points to periodic cycles to chaos in a Phillips curve system. *Journal of Macroeconomics*. Vol. 18, No. 1.
- Soliman, A.S. (1996b). Fractals in nonlinear economic dynamic systems. *Chaos, Solitons & Fractals*. Vol. 7, No. 2.
- Schultz, G. (2014). The importance of rules-based monetary policy in practice. *Journal of Economic Dynamics & Control*. No. 49.

- Stengos, T., & Murray, F. (1988). Some evidence concerning macroeconomic chaos. *Journal of Monetary Economics*. Vol. 22, No 3.
- Svensson, L. (1997). Inflation Forecast Targeting: Implementing and Monitoring Inflation Targets. *European Economic Review*. No. 41.
- Svensson L. (1999). Inflation Targeting as a Monetary Policy Rule. *Journal of Monetary Economics*. No. 43.
- Svensson L. (2002). Monetary policy and real stabilization. *CEPS Working Paper* No. 83.
- Svensson L. (2010). Inflation targeting. En: Darlauf, S., & Blume, L. (Eds). *Monetary economics*. Hampshire: Palgrave Macmillan.
- Taylor, J. (1979). Estimation and control of a macroeconomic model with rational expectations. *Econometrica*. No. 47.
- Taylor, J. (1993). Discretion versus policy rules in practice. *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, Vol. 39.
- Taylor, J. (2000). Uso de reglas de política monetaria en economías de mercado emergentes. *Banco de México*. Recuperado de: www.banxico.org.mx/politica-monetaria-e-inflacion/
- Taylor, J. (2007). The explanatory power of monetary policy rules. Simple principles have big impacts. *Business Economics*. Vol.42, No.4.
- Taylor, J., & Williams, J. (2010). Simple and Robust rules for monetary policy. *Federal Reserve Bank of San Francisco, Working Paper Series*, No.10.

- Tena, E. (1990). Control óptimo de sistemas lineales con expectativas racionales. *Investigaciones económicas (segunda época)*, Vol. XIV, No.1.
- Theil, H. (1958). *Economic Forecast and Policy*. Amsterdam: North-Holland Publishing Co.
- Thornton, H. (1802). *An enquiry into the nature and effects of the paper credit of Great Britain*. Nueva York: Reprints of Economic Classics.
- Timbergen, J. (1952). *On the Theory of Economic Policy*. Amsterdam: North Holland.
- Timbergen, J. (1956). *Economic Policy: Principles and Design*. Amsterdam: North Holland.
- Tustin, A. (1953). *The Mechanism of Economic Systems: An approach to the Problem of Economic Stabilization from the Point of View of Control System Engineering*. Cambridge: Harvard University Press.
- Ullersma, C., Berk, J., & Chapple, B. (2006). Money Rules. *DNB working paper*. No. 96
- Verhulst, P-F. (1845). *Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population*. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. Vol. 18, No. 1.
- Walsh, C. (2000). *Monetary theory and policy*. Londres: The MIT Press.
- Watt, R. (2009). How does interest rate policy affect inflation? A simple general equilibrium model with the interest rate as the policy instrument. *Review of Economic Design*. No. 13.

- Westcott, J., MacFarlane, A., & Mason, J. (1986). Application of control theory to macro-economic models. *Mathematical and Physical Sciences*. Vol. 407, No. 1832.
- Wicksell, K. (1898). *Interest and Prices*. Londres: McMillan and Co.
- Wieland, C., & Westerhoff, F. (2005). Exchange rate dynamics, central bank interventions and chaos control methods. *Journal of Economic Behavior and Organization*. Vol. 58.
- Woodford, M. (2001). The Taylor rule and optimal monetary policy. *American Economic Review Papers and Proceedings*. Vol. 91, No. 2.
- Woodford, M. (2002). Inflation stabilization and welfare. *NBER working papers* 8071.
- Woodford, M. (2003). *Interest and Prices*. Princeton: Princeton University Press
- Xiao-Dan, Z., Xiang-Dong, L., & Yuan, Z. (2013). Chaotic dynamic behavior analysis and control for financial risk system. *Chinese Physical B*. Vol. 22, No. 3.
- Zaguskin, V.L. (1961). *Handbook of numerical methods for the solution of algebraic and transcendental equations*. Gran Bretaña: Pergamon Press.

